

数学理论与应用系列

调和分析与小波入门

■ 杨奇祥　编著



WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

内容简介

本书是在长期给武汉大学相关专业的本科生和研究生上课的讲义稿基础上整理而成的。主要是关于调和分析与小波的一些入门知识，内容简明且结构完整。调和分析部分主要包括L^p空间的几个重要不等式及函数的卷积光滑逼近，Fourier变换及其逆定理，调和函数的基本性质及与Poisson积分的关系，分布理论基本知识等。小波部分简要地介绍了一些经典的小波知识。其理论部分主要包括正交的多分辨率分析，相应的尺度函数、滤波函数与小波基的关系，区间上的小波，以及如何改进窗口Fourier变换使其具有正交基等。小波的应用部分包含小波算法的数学原理，小波数据如何反映研究对象的性质（比如图像是否光滑，声音是否柔和动听），小波神经网络及水印技术等。本书可作为理工科本科生和研究生的教材或教学参考书。

责任编辑：顾素萍
责任校对：刘　欣
版式设计：马　佳
封面设计：王荆强


ISBN 978-7-307-09368-3
定价：18.00元



数学理论与应用系列

调和分析与小波入门

■ 杨奇祥 编著



WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

调和分析与小波入门/杨奇祥编著. —武汉：武汉大学出版社,2012.1
数学理论与应用系列
ISBN 978-7-307-09368-3

Ⅰ.调…　Ⅱ.杨…　Ⅲ.①调和分析　②小波理论　Ⅳ.①O177.5
②O174.22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 264838 号

责任编辑:顾素萍　　责任校对:刘　欣　　版式设计:马　佳

出版发行：武汉大学出版社　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件：cbs22@whu.edu.cn　网址：www.wdp.com.cn)
印刷:湖北金海印务有限公司
开本：720×1000　1/16　印张:8　字数:142 千字　插页:1
版次:2012 年 1 月第 1 版　2012 年 1 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-307-09368-3/O·466　定价:18.00 元



前　　言

理工类各学科高年级的本科生以及低年级研究生，都对数学的哪些东西对他们的将来有用和他们将来应该掌握数学的哪些内容充满了好奇，这也是我以前作为学生时最为困惑的. 因此，与其向他们介绍一些知识，不如向他们介绍这方面知识的一些轮廓，让他们自己决定学些什么. 小波从 20 世纪 80 年代形成理论体系以来，一路突飞猛进；国内 90 年代初开始引进小波，经过数年时间各大学就从无到有，到今天各个重点大学不但在数学学科有很多小波方面的人才，在许多其他学科同样如此. 小波是近 30 年创造就业机会最多的学科.

在我公派去法国读博士学习小波之前的 1990 年，当时武大的校长齐民友老先生对我说国外新发明了一门学科，就连计算机都不好计算的 Hilbert 矩阵也可以很好计算了；徐超江教授对我说，Meyer 在美国报告这方面的工作时教室里坐满了包括众多企业家在内的各方面人士. 那时候我不知道小波是什么，小波好像离我们的生活很远. 但今天，早上去上班坐的公交车或者开的私家车，很可能就是卫星导航的，而这个导航系统很可能就是利用小波开发出来的；打开电视或者上网，里面的图像或者信号就是利用小波处理过的；就连我们随身携带的手机，它的制式也可能是利用小波制定的. 大家知道，为了避免假币，每种纸币都有水印；很多其他的防伪标志也使用水印，其中小波处理的合适的水印被众多企业所推崇. 不过水印的工艺过于复杂也会带来麻烦，前一段时间新版的美元就因为水印工艺过于复杂导致几百亿美元无法发行. 还有小波对手写文字的识别的应用，如将一份手稿用扫描仪扫描一下，计算机就能八九不离十地识别这些文字和记号. 从上可以看出，30 年前与我们的生活几乎毫无关系的一门数学学科，今天几乎无时无刻不与我们每个人的生活直接或间接地息息相关.

从数学理论上来说，小波来源于调和分析；小波的发展又促进了调和分析的进一步发展. 新的学科要有老的知识才有基础，老的知识因为新的内容才有活力. 调和分析的合适的离散和精确化实方法是调和分析快速发展及在其他学科得到广泛应用的主要原因之一. 本书力图在新老学科之间架起一座

析，着重阐述小波如何适应了这一特征. 可以说调和分析和小波均是由天才们创立的学科. 1822 年 Fourier 发表了他的名著《热的解析理论》，自此我们有了 Fourier 级数、Fourier 积分等概念，总之有了调和分析. 在数学中调和分析一直充满活力地向前发展，对数学以及其他学科产生了越来越大的影响；特别是近 30 年来小波分析的突飞猛进的发展吸引了不同学科的人对它的注意. 这使得向理工类各学科高年级的本科生以及研究生介绍这方面的知识成为必要. 本教材试图讲述调和分析怎样为小波提供理论依据，小波反过来怎样促进调和分析的发展，小波为什么会成为数学发展最快的学科，也即众多科学领域发展最快的学科之一. 我们将调和分析和小波串起来讲，从小波的理论原理出发来简单明了地讲述一些入门知识. 本教材的讲义已经很多次在给高年级本科生和低年级研究生开的课程中讲授过了.

提到调和分析和小波，这里简单介绍一下 Fourier 和 Meyer 的一些情况.

Fourier 不是一位职业数学家，但物理学家 James Clark Maxwell 称赞 Fourier 分析是一部伟大的史诗. Fourier 全名是 Jean Baptiste Joseph Fourier，他生于 1768 年法国的 Auxerre 市；9 岁丧父，10 岁丧母；但仍继续上学，并于 1780 年进入 Auxerre 皇家军校学习. 13 岁时，他对数学十分着迷，常研究数学问题到深夜. 法国革命爆发后，他于 1793 年参加 Auxerre 革命委员会，1795 年先后两次被捕；法国革命结束后，他先到巴黎教书，后随 Napoleon 到埃及并成为埃及研究院长期负责人，写有一本关于埃及的书. 1802 年他回到法国，Napoleon 任命他为巴黎警察局高级官员长达 14 年；因行政工作出色，在政界享有很高威望. 但这并没有使他放弃研究数学的兴趣，早在 1807 年他就开始研究 Fourier 分析的核心内容，1817 年他被选入法国科学院.

Meyer 生于 1939 年 7 月 19 日，1986 年 11 月 4 日当选法国科学院通信院士，1993 年 11 月 15 日当选院士. 据他的博士生导师巴黎十一大前校长 Jean Pierre Kahane 院士介绍，Meyer 当初拜访他并想做他的博士生时，手里拿着一叠厚厚的论文；看过后，Jean Pierre Kahane 还将这一本书厚的论文推荐到法国数学会的 Asterique 上发表. 后来，Meyer 本想证明我们现在意义下的经典小波并不存在，但出乎意料地找到了许多源于 Littlewood-Paley分析的小波，那是第一次小波被大量发现的时期. 他和 Coifman 教授长期对 Calderón-Zygmund 算子的研究和其他研究者的工作为小波的发展准备了充分的理论基础. 由于在数学理论和应用上的杰出成就，在 2010 年数学家大会上，Meyer 获得了 Gauss 奖.

现在来说说什么是小波. 我们知道，在数学上小波不但革新了函数空间

的研究，还可以计算矩阵；由于它很好地适应了分布与算子的特征，小波在数学的各个学科得到广泛的应用. 不但学数学的人关注它，许多企业知名人士和科研人员也对它高度重视. 1991 年在我到法国 Meyer 教授名下攻读博士之前，那时在国内大概只有邓东皋教授和中科院的龙瑞麟等在一起讨论邓老师从美国带回来的 Meyer 的一个讲义. 这里顺便提一下，齐民友老师高瞻远瞩地于 1992 年在武汉大学召开了小波方向的国际会议，那可能是我所知道的国内最早的小波会议；20 世纪 90 年代，小波的发展如火如荼.

1910 年就出现了 Haar 小波，但小波这个词是一些做工程应用的科研人员在 20 世纪 80 年代后期命名的. 不过，小波的严格数学基础却与 Meyer 和 Coifman 长期对 Calderon-Zygmund 算子的研究有关；做工程应用的科研人员采用了一些在计算机上很成功的算法，但他们只能每次在计算机上验证以后才知道他们的算法是否成功，在数学上根本无法站住脚，因此他们邀请 Meyer 等数学家合作，希望从数学理论上得到支持，以避免每次在判断数据时不得不在计算机上进行大量复杂的计算. 生活中，石油与我们紧密地联系在一起，在寻找石油时会产生大量的钻探数据，面对大量的石油探测数据，到底哪些数据代表着有石油？有了从数学上提供的理论基础，问题就明朗化了. 自小波这门学科出现以来，二十多年过去了，国内已有很多大学的很多院系招收小波方向的博士；有关小波的文献呈爆炸性增长，小波的各种新概念不断出现，我也只能有时间读到其中很少的一部分.

但我记得刚到法国时人们问得最多的问题是小波到底是什么. 小波的名字有一大串：Haar 小波，Strömberg 小波，Daubechies 小波，Meyer 小波，Shannon 小波，Morlet 小波，Battle-Lemarié 小波，等等，它们的名字实在太多，这里我无法一一列举. 通常的平移展缩小波按性质不同有正交小波、样条小波、双正交小波、小波框架等；各种非平移展缩小波有Malvar小波、小波包、脊波、曲波等；小波按进制的不同有二进小波、多小波等；我们不但可以考虑欧氏空间上的小波，还可以考虑群上的小波……

小波在数学上有广泛的应用，如在函数空间、算子理论、概率统计、微分方程以及分形等方面都有其应用，在量子力学、非线性问题方面也有其应用. 最近我们还使用小波完全替代了容量的概念.

小波还广泛应用于数值计算中，如地震预报、逼近论、微分方程的数值解等中的应用；在信号处理、图像处理、语音合成、文字识别、密码学、神经网络等方面也用到小波. 在遥感影像方面，李德仁院士用小波建立的数字地球成为 2010 年武大的 10 件大事之一. 我们前面提到的数字水印，还有日常生活中遇到的股票和多媒体，甚至平时离不开的手机都可能涉及小波.

在具体介绍小波之前，本书着重阐述如何离散化所研究的对象，穿插讲述这些离散化与小波之间的关系. 我们试图将小波看成一种合理的离散化结构. 有人感慨小波发展的黄金时代过去了，然而每年仍有无数的小波方面的文章出现，关于小波的网站也数不清. 不过现在小波在理论上回答一些新的离散化现象进展不够，但在纯数学方面，近几十年研究很热的乘子空间、Morrey空间、量子力学等，也在用小波进行很好的研究；在此教材定稿的过程中，就有这方面大量的研究成果.

为什么需要小波？这里简单介绍一下 20 世纪 90 年代前小波的一段发展历史. Fourier 分析的思想和方法不但催生了调和分析及相关数学理论，还一直是数学发展的主要力量之一；不但在数学上应用广泛，在物理和工程学科中应用也相当广泛；还被广泛用于线性规划、大地测量、电话、收音机、X 射线等难以计数的科学计算和仪器中，是基础科学和应用科学研究开发的系统平台. 不过，Fourier 变换反映的是全部时间下的整体频域特征，不能提供任何局部时间段上的频率信息；Fourier 分析只有频率的局部性，没有空间位置的局部性，我们不知道瞬间的信息，它甚至不能保持 L^p 范数，这影响了它的应用. 这促使 Haar 用后来称为 Haar 小波的基来研究函数，经过 Haar 小波变换后，能保持 L^p 范数，最近的研究成果表明还能保持许多其他函数空间的范数. Haar 于 1910 年发现的这组基成了小波的第一个基，不过 Haar 系缺乏正则性，在 Fourier 变量上的局部化很差，没有引起足够的重视. 但是这方面的努力一直在继续. 1938 年，Littlewood-Paley 对 Fourier 级数建立了 Littlewood-Paley 分析，即按二进频率成分分组；但这种分组不是在固定的基上. 1946 年，Gabor 提出了著名的 Gabor 变换，后又发展成短时 Fourier 变换. 1965 年 Calderón 发现了再生公式，它的离散形式已接近小波展开，只是还无法得到正交系的结论. 在研究 Hardy 空间的过程中，R. Coifman 和 G. Weiss 创立了原子和分子学说；邓东皋教授说，Coifman 和 Meyer 持续对 Calderón-Zygmund 算子的研究为后来小波的发展奠定了很好的数学理论基础.

1981 年，Strömberg 对 Haar 系进行了改进，使其具备正则性，Strömberg 是构造出正则小波的第一人. 1982 年 Battle 在构造量子场论中采用了类似于 Calderón 再生公式的展开形式. J. S. Lienard 和 X. Rodet 在涉及声音信号（语音和音乐）的数值处理中也出现了小波的影子. 但小波这个词第一次出现是在 1984 年由地球物理学家 J. Morlet 提出的. J. Morlet 在分析地震数据时提出将地震波按一个确定函数的伸缩平移系展开. 随后他与 A. Groossmann 共同研究，发展了连续小波变换的几何体系，由此可以

将一个信号分解成对空间和尺度的贡献. 1985 年，Y. Meyer 和 A. Grossmann 与 I. Daubechies 共同进行研究，选取连续小波空间的一个连续子集，得到了一组称为小波框架的离散小波基. 随后人们试图寻找一组离散的正交基，Y. Meyer 试图证明不存在时频域都具有一定正则性的正交小波基；但是 1986 年他在研究 Littlewood-Paley 分析时却发现了 Fourier 变换具有紧支集的无穷光滑函数，正交小波第一次成批构造出来. 后来 Lemarié 和 Battle 又分别独立构造了具有指数衰减的小波.

但标志小波成为一个独立的理论的最重要概念之一的是把理论和应用紧密结合起来的多分辨率分析. 1983 年，P. J. Burt 和 E. A. Adelson 在数值计算上提出了一个金字塔算法，但工程师们只知道在应用上很有效，不知道从理论上找到有效的原因；Meyer 和 Mallat 的算法做到了这一点，并且成为后来小波构造的理论基础. Mallat 曾是 Ecole Polytechnique 大学的学生，当时 Meyer 是该校数学教授；后来 Mallat 成为 Philadelphia Pennsylvania 大学的博士研究生，研究计算机视觉. 一次偶然的机会，年仅 23 岁的他从一个朋友那里得知 Meyer 关于小波分析的思想，尤其是正交小波基的工作，并阅读了 Meyer 的论文. 当时 Mallat 认为 Meyer 的方法与他本人的方法有些相似，并可用于图像处理，但有些困难需要克服. 1986 年秋，Mallat 多次电话求见正在美国教授小波分析的 Meyer. 后来，Meyer 和 Mallat 在美国芝加哥大学见面，两人充分交换意见，共同研究问题难点的关键所在. 在三天时间里，他们解决了所有问题，宣告多分辨率分析正式形成. 这一想法不但统一了较长时间的小波基的构造理论，并且把数学理论与数值应用联系起来.

无限长的小波在应用中相当不方便，为了克服此困难，Daubechies 院士利用多分辨率发现了紧支集的小波. Daubechies 是比利时人，从小就想成为一名数学物理学家，在法国读博士时与 Grossmann 共过事. Daubechies 小波不能用解析公式给出，是通过迭代方法产生的；但证明 Daubechies 小波成为正交基运用的方法是利用多分辨率分析导致滤波函数. 另外，崔锦泰、王建中等对小波框架的研究和在应用中广泛采用的样条小波的发现，以及 A. Cohen 和Daubechies提出的双正交小波的概念，均大大地推进了小波理论的发展.

20 世纪 80 年代后期和 90 年代，小波的各种概念如雨后春笋般地冒出来，小波分析是泛函分析、调和分析、时频分析、数值分析、逼近论和广义函数等完美结合的产物. 各种不同问题的需要，使得尺度函数、镜像滤波器要求具有各种特殊的性质；通常小波具有各向同性而 Donoho 和 Coifman 提

出的脊波和曲波具有各向异性. 这些催生了各种不同类型算法. 从小波的理论、算法和历史可以看到小波的发展是实际需要催生的. 离散的方法涉及数学和应用的本质，几乎各学科都使用，小波独特的离散观点（消失矩、正则性、局部性等）提供的自由度为我们处理各种理论和应用的对象提供了许多选择. 粗略地说，小波的局部性可以让我们局部地研究对象；小波的消失矩性质可以让我们探测光滑性和奇异程度；小波的正则性则保证我们能从经过小波处理的数据回到原有的正则性. 数据获取，预处理，特征提出和分类，小波的这些工作就像是翻译函数各种性质的字典. 随着问题的需要，还会有新的各种观点出现. 小波分析的出现是不同学科、不同领域的交流与学科交叉发展的结果.

小波理论发展之初，最好地针对了 Fourier 变换环形结构特征，很好地解决了许多困扰人们的问题. 现实生活中对象的结构各种各样，如果小波的目的旨在提供与研究问题相适应的合理离散框架，那么小波无论在应用上还是在理论上都将取得越来越大的成功. 我们了解本科学生所开的所有课程，为了照顾各方面的读者，我们尽可能叙述一些较特殊的情形来避开各种术语；然后在每章最后一节的注释中解释如何过渡到一般情形. 在介绍调和分析的过程中我们有意避开了那些抽象的数学术语，尽可能介绍一些看得见的对象.

Texas A&M 大学逼近论中心主任崔锦泰院士认为，小波是一种具有非常丰富的数学内容，且对应用有巨大潜力的多方面实用的工具. 本书调和分析方面的选材和内容讲授尽量与小波的方法进行比较来说明小波的方法与以前方法的不同和优越性，由此来阐述小波的发展方向. 调和分析经历了两百多年的发展，小波是最近二三十年发展最快的学科，本书只选取其中部分内容，依据课程的进度来进行介绍；学习数学也许只需要老师讲一点轮廓性的东西，对它有一点基本印象，以后可以自己按照所研究方向有针对性地自学. 这些内容主要是：

第一部分为实分析、调和分析和分布理论的基础知识，包括前三章. 第二部分为小波及其应用，这为后三章.

第一章介绍实分析的基本内容，即连续函数空间与 Lebesgue 空间，Young 不等式，Hölder 不等式，Minkowski 不等式，函数的卷积与光滑逼近等. 它们是小波理论的必备理论基础，读者可以类比多分辨率分析和光滑逼近之间的关系，从而更好地理解小波的本质和将来的发展趋势.

第二章介绍调和分析的基础，即 Fourier 分析和调和函数边值. 它们包括 Fourier 变换的逆定理，乘法公式，Parseval 等式，酉算子；调和函数的

平均值性质与调和函数的关系，极值原理；调和函数的边值与 Poisson 积分的关系.

第三章介绍 20 世纪 50 年代由 Schwartz 建立的被称为现代分析基石的内容，即实验函数空间及其基本性质，基于对偶的分布理论，分布元素的构成，支集，微分，Fourier 变换；分布的单位逼近和 Littlewood-Paley 分解及通常的有条件基的函数空间的分类.

第四章介绍经典的小波理论，即多分辨率分析，尺度函数和滤波函数，同余与 Cohen 条件，小波基，小波的进一步发展.

第五章介绍其他的小波，即区间上的小波，周期小波，折叠小波；Marlval 小波，钟形函数，投影算子和投影空间上的标准正交基，极性，相容性.

从数学理论的角度来说，小波应用的根本原理都是一致的，因此本书只从全局观点出发选取较典型的几点讲述，安排在第六章，类似的应用大家可以自学. 第六章介绍了小波的应用原理，即金字塔算法，抽样，编码，重构，能观测局部突变性等；讲述了小波在理论上和实际中的几个应用，即 Besov 空间，小波神经网络，水印技术等. 没有像其他小波教材一样详细介绍信号处理和图像处理的技巧，因为这些可从几乎所有小波应用的书中找到.

本书的出版得到了教育部博士点基金资助，也得到武汉大学部分在任和离任校领导的关心，还得到武汉大学出版社及编辑的支持，在此对于他们的关心和付出的辛勤劳动表示诚挚的敬意和感谢.

编 者

2010 年 12 月



目　　录



第一章　连续函数空间与 Lebesgue 空间

本章介绍几个简单的由具体函数构成的拓扑空间 —— 连续函数空间与 Lebesgue 空间 $L^p(\mathbf{R}^n)$. 从其他课程我们已经知道了一些拓扑空间，如度量空间、赋范空间、Banach 空间、Hilbert 空间等，这些抽象空间有一种让人难以捉摸的感觉. 其实连续函数空间与 Lebesgue 空间 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 就可以构成这些抽象空间的具体特例.

本章的重点是：几个不等式，怎么用“好”函数逼近“差”函数，将通常的 L^p 函数分解成“好”性质的两部分；我们尽量使用二进网格，以便与后面的经典小波的技巧更好地进行比较. Lebesgue 积分里面的函数在一个测度为 0 的集合上函数值不同，但代表同一函数. 一个“差”函数难以捉摸，但“好”函数则不同；我们将用“好”函数来逼近“差”函数，这种逼近的想法在很多学科，理论上或应用上，都是很关键的技巧. 由于大量的应用都是在大于 1 维的情况下，我们一般在高维中表述我们的结果，虽然这样记号会复杂很多，我们觉得读者应该适应高维的记号.

1.1　连续函数空间

在学习微积分时，我们就开始接触连续函数的概念；但连续函数也是一种很奇怪的函数，定义在区间[0,1]上的合理构造的连续函数的像竟然可以充满一个方体. 从理论上来说，这使得我们不得不考虑连续函数的逼近；从应用上，我们也无法计算连续的函数，同样要考虑逼近. 我们最为熟悉的空间莫过于一致连续函数空间 $C(\mathbf{R}^n)$；即使是这样的连续函数，有一些独特的性质却不是我们每个人都了解的. 这里将介绍对连续函数在二进方体上的阶梯函数逼近和一阶多项式函数逼近. 我们之所以挑选这两种逼近，是因为后面学习小波时会发现前者与 Haar 小波密切相关，后者与一阶样条小波密切相关. 对于任意的集合 S，我们约定 $\chi_S(x)$ 为集合 S 上的特征函数. 一致连续函数空间是如下定义的：

定义1.1 称 $f(x)\in C(\mathbf{R}^n)$，如果 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，使得 $\forall |y-x|<\delta$ 有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant \varepsilon.$$

在应用研究中，我们不能表示一个连续取样的函数，需要对函数进行抽样逼近；在理论上，为了便于研究，我们也常常考虑用一些特殊的函数来逼近所研究的对象. 应用上最常用的是样条逼近，这里将介绍 0 阶样条逼近和一阶样条逼近. 由于经典小波是二进小波，二进方体在现在的函数逼近中有着特别的价值. 虽然本节的结论可以用非二进方体给出，但后面我们表述小波指标集时，为了更好地表述小波的几何结构，有时用到二进方体；为了让读者尽快适应二进方体的记号，我们尽量用二进方体的语言叙述. 二进方体的一个差不多等价的表述是所谓的 Whitney 分解和树等概念. 这涉及很深的数学背景，这里就不介绍了，有兴趣的读者可以从网上搜索到大量这类文章和书籍.

我们称 C 是一个**二进方体**，如果存在 $s\in\mathbf{Z}$ 和 $\boldsymbol{p}=(p_1,p_2,\cdots,p_n)\in\mathbf{Z}^n$ 使得

$$C=I_{s,\boldsymbol{p}}=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n:\ \forall i\in\{1,2,\cdots,n\},\text{有}\ 2^{-s}p_i\leqslant x_i\leqslant 2^{-s}(1+p_i)\};$$

令 Ξ 为所有二进方体组成的集合. 对于方体 $I_{s,\boldsymbol{p}}$，其上的 2^n 个端点 $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\epsilon}}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\epsilon}}=2^{-s}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{\epsilon}),$$

其中 $\boldsymbol{\epsilon}\in\{0,1\}^n$. $\forall i\in\{1,2,\cdots,n\}$，我们约定 $\boldsymbol{e}_i$ 为第 i 个分量为 1、其余分量为 0 的单位向量.

对于任意二进方体 $C=I_{s,\boldsymbol{p}}$，我们先给出表示线段、表面等集合的一些符号，以便在其上定义线性逼近函数. 对于 $i_1\in\{1,2,\cdots,n\}$，$\forall j\neq i_1$，$x_j\in\{2^{-s}p_j,2^{-s}(1+p_j)\}$，$\forall\boldsymbol{\epsilon}\in\{0,1\}^{n-1}$，连接

$$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\epsilon}}=(x_1,\cdots,x_{-1+i_1},2^{-s}p_{i_1},x_{1+i_1},\cdots,x_n)$$

和 $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\epsilon}}+2^{-s}\boldsymbol{e}_{i_1}$ 的线段可记为

$$F_{i_1}^{\boldsymbol{\epsilon}}=\{\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_{-1+i_1},y_1,x_{1+i_1},\cdots,x_n):\ 2^{-s}p_{i_1}\leqslant y_1\leqslant 2^{-s}(1+p_{i_1})\}.$$

$\forall i_1,i_2\in\{1,2,\cdots,n\}$，$i_1<i_2$，$\forall j\neq i_1$，$j\neq i_2$，$x_j\in\{2^{-s}p_j,2^{-s}(1+p_j)\}$，$\forall\boldsymbol{\epsilon}\in\{0,1\}^{n-2}$，记连接 2^2 个端点

$$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\epsilon}}=(x_1,\cdots,x_{-1+i_1},2^{-s}p_{i_1},x_{1+i_1},\cdots,x_{-1+i_2},2^{-s}p_{i_2},x_{1+i_2},\cdots,x_n),$$

$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\epsilon}}+2^{-s}\boldsymbol{e}_{i_1},\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\epsilon}}+2^{-s}\boldsymbol{e}_{i_2}$ 和 $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\epsilon}}+2^{-s}\boldsymbol{e}_{i_1}+2^{-s}\boldsymbol{e}_{i_2}$ 的面为

$$F_{i_1,i_2}^{\epsilon}=\{x=(x_1,\cdots,x_{-1+i_1},y_1,x_{1+i_1},\cdots,x_{-1+i_2},y_2,x_{1+i_2},\cdots,x_n):$$
$$2^{-s}p_{i_1}\leqslant y_1\leqslant 2^{-s}(1+p_{i_1}),\ 2^{-s}p_{i_2}\leqslant y_2\leqslant 2^{-s}(1+p_{i_2})\}.$$

依此类推，$\forall\, i_1<i_2<i_3$，$\epsilon\in\{0,1\}^{n-3}$，定义连接 2^3 个端点的体为 $F_{i_1,i_2,i_3}^{\epsilon}$，直到 $F_{i_1,i_2,\cdots,i_{n-1}}^{\epsilon}$. 连接所有 2^n 个端点的体 C 也记为

$$I_{s,p}=F_{1,2,\cdots,n}^{\epsilon}=F_{1,2,\cdots,n}.$$

给定两点 $x_1=(x_{1,1},x_{1,2},\cdots,x_{1,n})$ 和 $x_2=(x_{2,1},x_{2,2},\cdots,x_{2,n})$，连接这两点的线段上的点 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 可以表示为

$$y_1=\theta(x_{2,1}-x_{1,1})+x_{1,1},\ \cdots,\ y_n=\theta(x_{2,n}-x_{1,n})+x_{1,n},\quad 0\leqslant\theta\leqslant 1;$$

用向量表示就是

$$y=\theta(x_2-x_1)+x_1,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 1.$$

给定 x_1 和 x_2 的函数值 $f(x_1)$ 和 $f(x_2)$，连接这两点的线性函数为

$$g(y)=f(x_1)+\theta(f(x_2)-f(x_1)),\quad 0\leqslant\theta\leqslant 1.$$

对于一致连续函数，我们有下面的阶梯函数逼近和一阶样条函数逼近定理：

定理 1.1　任意给定的 $f(x)\in C(\mathbf{R}^n)$，那么 $\forall\,\varepsilon>0$，存在某个正数 δ，我们有：

（ⅰ）存在一列互不相交的测度等价于 δ 的二进方体 C_i 和数列 f_i 使得 $\left|f(x)-\sum_i f_i\chi_{C_i}(x)\right|<\varepsilon$；

（ⅱ）存在一列互不相交的测度等价于 δ 的二进方体 C_i 和分片光滑的线性函数 $\tau_{C_i}(x)$ 使得 $\left|f(x)-\sum_i\tau_{C_i}(x)\right|<\varepsilon$.

证明思想　该定理（ⅰ）的证明先由一致连续性将 $\mathbf{R}^n$ 分成边长相等的二进方体的并，然后由方体中心的一个点的值代替在方体上的值来逼近. 该定理（ⅱ）的证明先由一致连续性将 $\mathbf{R}^n$ 分成边长相等的二进方体的并，然后由方体的 2^n 个顶点的值来构造分片光滑的线性函数，以此代替在方体上的值来逼近. 实际上在我们学习样条小波时，这分别类似于 0 阶样条逼近和一阶样条逼近.

证　（ⅰ）由一致连续性知，$\forall\,\varepsilon>0$，存在整数 N，使得 $\forall\,|x-y|<\delta=\sqrt{n}\,2^{1-N}$，有 $|f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon$. 我们以原点为某一方体顶点，以 2^{-N} 为边长等分整个 $\mathbf{R}^n$，所得二进方体为 C_i，记方体中心为 x_i；令 $f_i=f(x_i)$. 很显然，$\forall\, x\in C_i$，有 $|f(x)-f_i|\leqslant\varepsilon$. 这样结论（ⅰ）得证.

（ⅱ）由一致连续性知，$\forall\,\varepsilon>0$，存在整数 N，使得 $\forall\,|x-y|<\delta=\sqrt{n}\,2^{1-N}$，有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2n}.$$

我们以原点为某一方体顶点，以 2^{-N} 为边长等分整个 $\mathbf{R}^n$，所得二进方体为 C_i. 下面我们在二进方体 C_i 上构造一阶样条逼近.

实际上，对于任意方体 $C=I_{s,p}$ 和给定在此方体上的 2^n 个端点 $\boldsymbol{x}_\epsilon$ 的值 $f(\boldsymbol{x}_\epsilon)(\epsilon\in\{0,1\}^n)$，可以构造整个方体上的线性函数，且此线性函数的值与端点的函数值之差很好控制. 先根据端点的值用线性函数定义在线段 $F^\epsilon_{i_1}$ $(i_1\in\{1,2,\cdots,n\})$ 上的值；对于 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}_\epsilon+\theta 2^{-s}\boldsymbol{e}_{i_1}$ $(0\leqslant\theta\leqslant1)$，定义

$$g^\epsilon_{i_1}(\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{x}_\epsilon)+\theta(f(\boldsymbol{x}_\epsilon+2^{-s}\boldsymbol{e}_{i_1})-f(\boldsymbol{x}_\epsilon)),$$

于是

$$\begin{aligned}|g^\epsilon_{i_1}(\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x}_\epsilon)|&\leqslant|f(\boldsymbol{x}_\epsilon+2^{-s}\boldsymbol{e}_{i_1})-f(\boldsymbol{x}_\epsilon)|\\&\leqslant\max|f(\boldsymbol{x}_\epsilon)-f(\boldsymbol{x}_{\epsilon'})|.\end{aligned}$$

然后对于面 $F^\epsilon_{i_1,i_2}(\epsilon\in\{0,1\}^{n-1})$ 定义其中心 $\boldsymbol{x}^\epsilon_{i_1,i_2}=\boldsymbol{x}_\epsilon+2^{-1-s}(\boldsymbol{e}_{i_1}+\boldsymbol{e}_{i_2})$ 的值为端点值的平均值：

$$\begin{aligned}g^\epsilon_{i_1,i_2}(\boldsymbol{x}^\epsilon_{i_1,i_2})=\frac{1}{4}(&f(\boldsymbol{x}_\epsilon)+f(\boldsymbol{x}_\epsilon+2^{-s}\boldsymbol{e}_{i_1})+f(\boldsymbol{x}_\epsilon+2^{-s}\boldsymbol{e}_{i_2})\\&+f(\boldsymbol{x}_\epsilon+2^{-s}\boldsymbol{e}_{i_1}+2^{-s}\boldsymbol{e}_{i_2})),\end{aligned}$$

利用中心的值和边界的值用线性函数定义面 $F^\epsilon_{i_1,i_2}$ 的值 $g^\epsilon_{i_1,i_2}(\boldsymbol{y})$ $(\epsilon\in\{0,1\}^{n-1})$，于是

$$|g^\epsilon_{i_1,i_2}(\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x}_\epsilon)|\leqslant3\max|f(\boldsymbol{x}_\epsilon)-f(\boldsymbol{x}_{\epsilon'})|.$$

依此类推，直到给出在整个二进方体C上的值. 记此函数为$\tau_C(\boldsymbol{x})$，由上面的构造有

$$|\tau_C(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_\epsilon)|\leqslant(2n-1)\max|f(\boldsymbol{x}_\epsilon)-f(\boldsymbol{x}_{\epsilon'})|.$$

很显然，$\forall\,\boldsymbol{x}\in C_i$，我们有

$$\begin{aligned}|f(\boldsymbol{x})-\tau_{C_i}(\boldsymbol{x})|&\leqslant|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_\epsilon)|+|f(\boldsymbol{x}_\epsilon)-\tau_{C_i}(\boldsymbol{x})|\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{2n}+(2n-1)\max|f(\boldsymbol{x}_{\epsilon'})-f(\boldsymbol{x}_\epsilon)|\\&\leqslant\varepsilon.\end{aligned}$$

这样结论(ii)得证. ∎

1.2 Lebesgue 空间 $L^p(\mathbf{R}^n)$ $(0<p\leqslant\infty)$

古典微积分与近代实分析的区别之一在于，前者研究函数，着重于单个函数本身的结构，而后者则更进一步，把函数看成“空间”的一个元素加以考

察. 由函数的可积性定义的函数空间是实分析的最重要的研究对象，在一个测度为 0 的集合上取值不同不影响函数的可积性. 这是因为定义 Riemann 积分时所取的分割是在定义域上做的，而定义 Lebesgue 积分的分割是在值域上取的. 在各种各样的积分理论中，Lebesgue 积分理论是最成功的一种. 因此，用 Lebesgue 积分直接定义的空间 L^p，便成为实分析研究的第一类最重要而又最基本的函数空间.

对于可测函数 $f(x)$，我们定义 **Lebesgue** 空间 $L^p(\mathbf{R}^n)$ $(0<p\leqslant\infty)$ 如下：

定义 1.2 设 $0<p\leqslant\infty$，令

$$L^p(\mathbf{R}^n)=\left\{\text{可测函数 } f(x):\ \|f(x)\|_p=\left(\int|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}<\infty\right\},$$

$$0<p<\infty;$$

$$L^\infty(\mathbf{R}^n)=\{\text{可测函数 } f(x):\ \|f(x)\|_\infty=\mathrm{ess\ sup}|f(x)|=$$
$$\inf\{a\geqslant0:\ \{x:\ |f|>a\}\ \text{是零测集}\}<\infty\}.$$

我们一般不区分记号 $\|f(x)\|_p$ 和 $\|f(x)\|_{L^p}$. 本节的任务是证明 Hölder 不等式与 Minkowski 不等式，它们是整个 L^p 理论的基础，而且也是实分析中最常用的不等式. 其中 Hölder 不等式的证明依赖于 Young 不等式.

首先我们介绍 Young 不等式，它可以利用微分求极值点的方法来证明，在这里我们通过左连续函数围成的面积大小来证明它. 一个实轴上的函数 $g(x)$ 左连续是指从左边趋向于某点时其极限存在且等于在该点的函数值，即

$$\lim_{x<x_0,\ x\to x_0}g(x)=g(x_0).$$

设 $\varphi(t)$ 是 $\mathbf{R}_+=(0,\infty)$ 到 $\overline{\mathbf{R}}_+=[0,\infty)$ 的左连续增(即不减) 函数，则可以定义 $\varphi(t)$ 的左连续逆函数 $\psi(s)$ 为

$$\psi(s)=\inf\{t:\ \varphi(t)\geqslant s\}.$$

令上述两函数与坐标轴之间围成的区域的面积函数分别为

$$\Phi(u)=\int_0^u\varphi(t)\mathrm{d}t,$$

$$\Psi(v)=\int_0^v\psi(s)\mathrm{d}s.$$

具体见图 1-1.

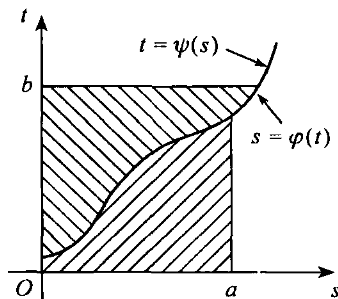


图 1-1

在上述假设下，我们有

引理 1.1 (Young 不等式)　下面不等式成立：

$$ab \leqslant \Phi(a)+\Psi(b), \quad \forall a,b \in \mathbf{R}_+, \tag{1.1}$$

且等式成立当且仅当 $\varphi(a)=b$ 或 $\psi(b)=a$. (1.1) 称为 Young 不等式.

证　如果 $\Phi(a)$ 和 $\Psi(b)$ 中有一个为 ∞，不等式(1.1) 显然成立. 下面考虑 $\Phi(a)$ 和 $\Psi(b)$ 全有限的情形. 在图 1-1 中，$\Phi(a)$ 代表的是 $s=0$，$t=0$，$t=a$ 和 $s=\varphi(t)$ 所围成的图形的面积，$\Psi(b)$ 代表的是 $t=0$，$s=b$ 和 $t=\psi(s)$ 所围成的图形的面积；它们两个的面积之和总不小于 $s=0$，$t=0$，$s=b$，$t=a$ 所围成的矩形的面积；若其和等于矩形的面积，当且仅当 $\varphi(a)=b$ 或 $\psi(b)=a$.

下面我们利用 Young 不等式来证明 Hölder 不等式，并研究使得 Hölder 不等式中等式成立的充要条件.

定理 1.2 (Hölder 不等式)　设 $1\leqslant p\leqslant\infty$，$p'$ 为 p 的相伴数，即满足

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1.$$

(i) 如果 $f\in L^p(\mathbf{R}^n)$ 和 $g\in L^{p'}(\mathbf{R}^n)$，那么 $fg\in L^1(\mathbf{R}^n)$，且

$$\left|\int fg\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right| \leqslant \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}}. \tag{1.2}$$

(ii) 当 $1<p<\infty$ 时，不等式(1.2) 中等式成立的充要条件为：存在实数 b 使得 $f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})=|f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})|\mathrm{e}^{ib}$, a. e.，且

$$\frac{|f|^p}{\|f\|_{L^p}^p}=\frac{|g|^{p'}}{\|g\|_{L^{p'}}^{p'}}, \quad \text{a. e.}$$

(iii) 当 $p=1$ 时，不等式(1.2) 中等式成立的充要条件为：$\exists b\in \mathbf{R}$，使得

$$fg=|f|\,\|g\|_{L^\infty}\mathrm{e}^{ib}, \quad \text{a. e.}$$

(iv) 当 $p=\infty$ 时，上式交换 f,g 的顺序后成立，即不等式(1.2) 中等式成立的充要条件为：$\exists b\in\mathbf{R}$，使得

$$fg=\|f\|_{L^\infty}|g|\mathrm{e}^{ib}, \quad \text{a. e.}$$

(1.2) 称为 Hölder 不等式.

证　当 $p=1,\infty$ 时，不等式估计是平凡的.

当 $1<p<\infty$ 时，我们使用 Young 不等式来证明(1.2). 令 $\varphi(t)=t^{p-1}$，$\psi(s)=s^{\frac{1}{p-1}}$；由此而得

$$\Phi(u)=\int_0^u\varphi(t)\,\mathrm{d}t=\frac{u^p}{p}, \quad \Psi(v)=\int_0^v\psi(s)\,\mathrm{d}s=\frac{v^{p'}}{p'}.$$

令 $a=\frac{|f|}{\|f\|_{L^p}}$ 和 $b=\frac{|g|}{\|g\|_{L^{p'}}}$；运用 Young 不等式，得到

$$\frac{|f|}{\|f\|_{L^p}}\frac{|g|}{\|g\|_{L^{p'}}}\leqslant\frac{|f|^p}{p\|f\|_{L^p}^p}+\frac{|g|^{p'}}{p'\|g\|_{L^{p'}}^{p'}},\quad \text{a. e.} \tag{1.3}$$

对(1.3) 两边积分，得到

$$\int\frac{|f|}{\|f\|_{L^p}}\frac{|g|}{\|g\|_{L^{p'}}}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1.$$

由此我们得到所需要的估计.

现在考虑(1.2) 等号成立的条件. (1.2) 等号成立等价地有下面两式成立：

$$\left|\int f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right|=\int|f(\boldsymbol{x})||g(\boldsymbol{x})|\mathrm{d}\boldsymbol{x},\quad \text{a. e.}, \tag{1.4}$$

$$\||f(\boldsymbol{x})||g(\boldsymbol{x})|\|_{L^1}=\|f(\boldsymbol{x})\|_{L^p}\|g(\boldsymbol{x})\|_{L^{p'}}, \tag{1.5}$$

其中(1.4) 成立等价地有：存在实数 b，使得

$$\mathrm{e}^{ib}\int fg\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int|f||g|\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

也等价地有

$$\int(|f||g|-\mathrm{e}^{ib}fg)\mathrm{d}\boldsymbol{x}=0.$$

特别地，

$$\int(|f||g|-\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{ib}fg))\mathrm{d}\boldsymbol{x}=0.$$

由于恒有

$$|f||g|-\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{ib}fg)\geqslant 0,\quad \text{a. e.},$$

由积分为 0 得到

$$|f||g|=\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{ib}fg),\quad \text{a. e.}$$

由于 $\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{ib}fg)\leqslant|\mathrm{e}^{ib}fg|\leqslant|f||g|$，因此

$$\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{ib}fg)=|\mathrm{e}^{ib}fg|,\quad \text{a. e.}$$

这就是说，$\mathrm{e}^{ib}fg$ 的虚部几乎处处为零，从而

$$|f||g|=\mathrm{e}^{ib}fg,\quad \text{a. e.}$$

$p=\infty$ 的情形类似于 $p=1$ 的情况，此两种情况的等号成立仅看 $p=1$ 的情形即可. 由于 $\int|fg|\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int|f|\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\|g\|_{L^\infty}$ 的等价条件为

$$|f||g|=|f|\|g\|_{L^\infty},\quad \text{a. e.},$$

这样一来就得到了 $p=1,\infty$ 时(1.2) 等号成立的充要条件.

对于 $1<p<\infty$ 的情况，注意在证明 Hölder 不等式时，我们用 Young 不等式得到(1.3)，根据 Young 不等式成为等式的充要条件为

$$\frac{|g|}{\|g\|_{L^{p'}}}=\left(\frac{|f|}{\|f\|_{L^p}}\right)^{p-1},\quad \text{a. e.}$$

可得到(1.5) 成立的充要条件为

$$\frac{|f|^p}{\|f\|_{L^p}^p}=\frac{|g|^{p'}}{\|g\|_{L^{p'}}^{p'}},\quad \text{a. e.}$$

∎

下面的 Minkowski 不等式说明了当 $1\leqslant p\leqslant\infty$ 时定义 1.2 中的量 $\|f(x)\|_p$ 能够成为 Banach 空间的范数.

定理 1.3 (Minkowski 不等式) 设 $1\leqslant p\leqslant\infty$，则有

$$\|f+g\|_p\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p,\quad \forall f,g\in L^p(\mathbf{R}^n). \tag{1.6}$$

(1.6) 称为 Minkowski 不等式.

证 当 $p=1,\infty$ 时，(1.6) 显然成立. 现设 $1<p<\infty$. 运用微积分知识，我们有下面的不等式：

$$|a+b|^p\leqslant 2^{p-1}(|a|^p+|b|^p),\quad \forall a,b\in C,\ 1\leqslant p<\infty. \tag{1.7}$$

由(1.7) 可知，从 $f,g\in L^p(\mathbf{R}^n)$ 有 $f+g\in L^p(\mathbf{R}^n)$，这也就是说，$|f+g|^{p-1}\in L^{p'}(\mathbf{R}^n)$. 由于

$$\begin{aligned}\int|f+g|^p\mathrm{d}x&\leqslant\int|f+g|^{p-1}(|f|+|g|)\mathrm{d}x\\&\leqslant\int|f+g|^{p-1}|f|\,\mathrm{d}x+\int|f+g|^{p-1}|g|\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

利用 Hölder 不等式，有

$$\begin{aligned}&\int|f+g|^{p-1}|f|\,\mathrm{d}x+\int|f+g|^{p-1}|g|\,\mathrm{d}x\\&\leqslant(\|f\|_p+\|g\|_p)\|f+g\|_p^{\frac{p}{p'}}.\end{aligned}$$

既然 $\|f+g\|_p<\infty$，故得 $\|f+g\|_p\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p$. ∎

下面附带提一下，Lebesgue 空间提供了数学中三类抽象空间(Hilbert 空间、Banach 空间和 Frechét 空间) 的具体实例，大家可作了解，不要求掌握.

定义 1.3 如果线性空间的距离是平移不变的完备距离，则称此线性空间为 **Frechét 空间.**

$\forall f,g\in L^2$，定义内积

$$\langle f,g\rangle=\int f(x)\,\overline{g(x)}\mathrm{d}x;$$

当 $0<p<1$ 时，$\forall f,g\in L^p$，定义度量 $d(f,g)=d_p(f,g)=\|f-g\|_p^p$，我们有

定理1.4　(ⅰ) 对于内积$\langle\cdot,\cdot\rangle$，$L^2(\mathbf{R}^n)$是 Hilbert 空间.

(ⅱ) 当$1\leqslant p\leqslant\infty$时，$\|\cdot\|_p$是范数，且$L^p(\mathbf{R}^n)$是Banach空间.

(ⅲ) 当$0<p<1$时，$d(\cdot,\cdot)$是距离函数，且$L^p(\mathbf{R}^n)$是 Frechét 空间.

1.3　卷积和光滑逼近

$L^p(\mathbf{R}^n)$中的元素是在$\mathbf{R}^n$上磨掉一个测度为 0 的集合后定义的，在逐点意义下，我们根本就没法讨论逼近. 比如说

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{如果 } x \text{ 为有理数},\\ 1, & \text{如果 } x \text{ 为无理数},\end{cases}$$

这个例子说明，在任意一点附近均可以找到两组点列，一组使函数值收敛为 1，另一组使函数值收敛为 0. 更为甚者，我们有下面的例子：

$$f(x)=\begin{cases}pq, & \text{如果 } x \text{ 为有理数}, x=\dfrac{q}{p}, \text{这里 } p\in\mathbf{N}_+,\\ & q\in\mathbf{N}, \text{且 } p,q \text{ 的最大公约数为 } 1,\\ 0, & \text{如果 } x \text{ 为无理数},\end{cases}$$

由于$f(x)\neq 0$的点的集合为有理数，而全体有理数的集合的测度为 0，因此$\|f(x)\|_p=0$；但是在任意点附近均存在一列点$\{x_n\}$使得$f(x_n)\to\infty$. 由此可见L^p中的元素的不可捉摸性. 但是L^p中的元素整体作小的平移，在范数(当$1\leqslant p\leqslant\infty$时) 或拟范数(当$0<p<1$时) 意义下我们却有如下的连续性：

定理1.5　对于$0<p<\infty$，$f(\boldsymbol{x})\in L^p(\mathbf{R}^n)$，如果$|\boldsymbol{y}|\to 0$，那么

$$\|f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x})\|_p\to 0.$$

证明思想　将$f(\boldsymbol{x})$变成非负实值函数，对任意的$\varepsilon>0$，将非负实值函数分解成一个支集在较远的函数$f_1(\boldsymbol{x})$和支集在紧集上但取值比较大的函数$f_2(\boldsymbol{x})$，得到$\tilde{f}_2(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})-f_1(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_2)$；然后根据$\tilde{f}_2(\boldsymbol{x})$的取值情况对紧集用最大二进方体替代，对于尺寸较小的归纳到$f_3(\boldsymbol{x})$，得到$\tilde{f}_3(\boldsymbol{x})=\tilde{f}_2(\boldsymbol{x})-f_3(\boldsymbol{x})$；最后再对$\tilde{f}_3(\boldsymbol{x})$用阶梯函数$f_5(\boldsymbol{x})$逼近，剩下的部分为$f_4(\boldsymbol{x})$. 其中函数$f_i(\boldsymbol{x})$ $(i=1,2,3,4)$为本身范数很小的函数，而对二进方体上阶梯函数的范数差进行估计，变成对相应集合的测度进行估计. 注意我们说的互不相交是指相差一个零测集.

证 我们不妨设 $f(x)$ 为非负实值函数，否则存在 4 个非负实值的函数 $g_1(x), g_2(x), g_3(x), g_4(x)$，使得

$$f(x)=g_1(x)-g_2(x)+\mathrm{i}(g_3(x)-g_4(x)),$$

这时定理的证明转换为讨论 $f(x)$ 为非负实值函数的情况.

对于任意的 $\varepsilon>0$，存在整数 N_1 和中心在原点、边长为 2^{N_1} 的方体 C_ε，使得在方体的补集合 $C_\varepsilon^c=\mathbf{R}^n\backslash C_\varepsilon$ 上有

$$\int_{C_\varepsilon^c}|f(x)|^p\mathrm{d}x<10^{-p}\varepsilon^p.$$

记 $f_1(x)=f(x)\chi_{C_\varepsilon^c}(x)$，有

$$\int f_1(x)^p\mathrm{d}x=\int_{C_\varepsilon^c}|f(x)|^p\mathrm{d}x<10^{-p}\varepsilon^p.$$

令 $\tilde{f}_1(x)=f(x)-f_1(x)$.

$\forall k\in\mathbf{N}$，令 $E_k=\{x\in C_\varepsilon: k\leqslant f(x)<k+1\}$，则

$$\sum_k(1+k)^p|E_k|<\infty.$$

因此，存在整数 N_2，使得对于集合 $E=\bigcup_{k\geqslant N_2}E_k$ 有

$$\int_E f(x)^p\mathrm{d}x<10^{-p}\varepsilon^p.$$

记 $f_2(x)=f(x)\chi_E(x)$，有

$$\int f_2(x)^p\mathrm{d}x<10^{-p}\varepsilon^p.$$

令 $\tilde{f}_2(x)=\tilde{f}_1(x)-f_2(x)$.

固定整数 $m\geqslant 10|C_\varepsilon|^{\frac{1}{p}}\varepsilon^{-1}$. 对于 $0\leqslant k\leqslant mN_2-1$，令

$$E_{m,k}=\left\{x\in C_\varepsilon: \frac{k}{m}\leqslant f(x)-f_2(x)<\frac{k+1}{m}\right\},$$

则 $\sum_k|E_{m,k}|\leqslant|C_\varepsilon|$. 对于固定的 k，挑选 $E_{m,k}$ 中的最大二进方体 $E_{m,k,1}$；再在 $E_{m,k}\backslash E_{m,k,1}$ 中接着挑选最大二进方体 $E_{m,k,2}$…… 由于上面的 C_ε 和 N_2 构造的有限性，存在有限的 $N_{m,k}$ 使得上述挑选最大二进方体的过程最多持续有限的 $N_{m,k}$ 步，就会使得互不相交的最大二进方体 $E_{m,k,l}$ 满足

$$\left|E_{m,k}\backslash\bigcup_{1\leqslant l\leqslant N_{m,k}}E_{m,k,l}\right|\leqslant 10^{-p}\varepsilon^pN_2{}^{-p}|C_\varepsilon|^{-1}|E_{m,k}|.$$

记 $F_{m,k}=\bigcup_{1\leqslant l\leqslant N_{m,k}}E_{m,k,l}$. 将所有这样的集合并起来，我们得到 $F_m=\bigcup_k F_{m,k}$；记余下的部分为 $F=\bigcup_k(E_{m,k}\backslash F_{m,k})$，则

$$|F|\leqslant 10^{-p}\varepsilon^pN_2{}^{-p}|C_\varepsilon|^{-1}\sum_k|E_{m,k}|\leqslant 10^{-p}\varepsilon^pN_2{}^{-p}.$$

记 $f_3(x)=f(x)\chi_F(x)$，有

$$\int f_3(x)^p \mathrm{d}x \leqslant N_2{}^p \cdot 10^{-p}\varepsilon^p N_2{}^{-p}=10^{-p}\varepsilon^p.$$

令 $\tilde{f}_3(x)=\tilde{f}_2(x)-f_3(x)$.

若 $x\in E_{m,k,l}$，记 $f_5(x)=\dfrac{k}{m}$；否则 $f_5(x)=0$. 令

$$f_4(x)=\tilde{f}_3(x)-f_5(x),$$

则

$$\int |f_4(x)|^p \mathrm{d}x \leqslant \left(\frac{1}{m}\right)^p |C_\varepsilon| \leqslant 10^{-p}\varepsilon^p.$$

对所有方体 $E_{m,k,l}$，必定存在边长最短的方体，记其边长为 2^s. 以 2^s 为边长将 F_m 分成不相交二进方体 $G_{m,j}$ 的并：$F_m=\bigcup\limits_j G_{m,j}$. 选取

$$\tau_\varepsilon=\frac{1}{2}\left(1-\left(1-\frac{1}{2}5^{-p}\varepsilon^p N_2{}^{-p}|C_\varepsilon|^{-1}\right)^{\frac{1}{n}}\right)$$

和 $|y|\leqslant \tau_\varepsilon 2^s$；对于边长为 2^s 的方体 Q，我们有

$$\begin{aligned}|Q\backslash(y+Q)| &\leqslant 2^{ns}-(1-2\tau_\varepsilon)^n 2^{ns}=2^{ns}(1-(1-2\tau_\varepsilon)^n)\\ &=\frac{1}{2}5^{-p}\varepsilon^p N_2{}^{-p}|C_\varepsilon|^{-1}|Q|\end{aligned}$$

和

$$|(y+Q)\backslash Q| \leqslant \frac{1}{2}5^{-p}\varepsilon^p N_2{}^{-p}|C_\varepsilon|^{-1}|Q|.$$

从而

$$\begin{aligned}&\|f_5(x+y)-f_5(x)\|_p^p\\ &\quad=\int |f_5(x+y)-f_5(x)|^p \mathrm{d}x\\ &\quad\leqslant \sum_j \int_{G_{m,j}\backslash(y+G_{m,j})} |f_5(x)|^p \mathrm{d}x+\sum_j \int_{(y+G_{m,j})\backslash G_{m,j}} |f_5(x+y)|^p \mathrm{d}x\\ &\quad\leqslant \sum_j N_2{}^p |G_{m,j}\backslash(y+G_{m,j})|+\sum_j N_2{}^p|(y+G_{m,j})\backslash G_{m,j}|.\end{aligned}$$

由于

$$|G_{m,j}\backslash(y+G_{m,j})| \leqslant \frac{1}{2}5^{-p}\varepsilon^p N_2{}^{-p}|C_\varepsilon|^{-1}|G_{m,j}|$$

和

$$|(y+G_{m,j})\backslash G_{m,j}| \leqslant \frac{1}{2}5^{-p}\varepsilon^p N_2{}^{-p}|C_\varepsilon|^{-1}|G_{m,j}|,$$

从而

$$\begin{aligned}&\|f_5(x+y)-f_5(x)\|_p^p\\&\quad\leqslant\frac{1}{2}5^{-p}\varepsilon^p|C_\varepsilon|\sum_j|G_{m,j}|+\frac{1}{2}5^{-p}\varepsilon^p|C_\varepsilon|\sum_j|G_{m,j}|\\&\quad\leqslant 5^{-p}\varepsilon^p.\end{aligned}$$

因此$\|f_5(x+y)-f_5(x)\|_p\leqslant\frac{1}{5}\varepsilon$.

于是，对于$1\leqslant p<\infty$，有

$$\begin{aligned}&\|f(x+y)-f(x)\|_p\\&\quad\leqslant\|f_1(x)\|_p+\|f_1(x+y)\|_p+\|f_2(x)\|_p+\|f_2(x+y)\|_p\\&\qquad+\|f_3(x)\|_p+\|f_3(x+y)\|_p+\|f_4(x)\|_p+\|f_4(x+y)\|_p\\&\qquad+\|f_5(x+y)-f_5(x)\|_p\\&\quad\leqslant 2\|f_1(x)\|_p+2\|f_2(x)\|_p+2\|f_3(x)\|_p+2\|f_4(x)\|_p\\&\qquad+\|f_5(x+y)-f_5(x)\|_p\\&\quad\leqslant\varepsilon.\end{aligned}$$

对于$0<p<1$，有

$$\begin{aligned}&\|f(x+y)-f(x)\|_p^p\\&\quad\leqslant\|f_1(x)\|_p^p+\|f_1(x+y)\|_p^p+\|f_2(x)\|_p^p+\|f_2(x+y)\|_p^p\\&\qquad+\|f_3(x)\|_p^p+\|f_3(x+y)\|_p^p+\|f_4(x)\|_p^p+\|f_4(x+y)\|_p^p\\&\qquad+\|f_5(x+y)-f_5(x)\|_p^p\\&\quad\leqslant 2\|f_1(x)\|_p^p+2\|f_2(x)\|_p^p+2\|f_3(x)\|_p^p+2\|f_4(x)\|_p^p\\&\qquad+\|f_5(x+y)-f_5(x)\|_p^p\\&\quad\leqslant 2^{3-p}\cdot 5^{-p}\varepsilon^p.\end{aligned}$$

∎

根据上面定理的证明过程，我们可得到

推论1.1 给定$f(x)\in L^p$ $(0<p<\infty)$. $\forall N>1$，存在两个正数C_N^1,C_N^2和函数$f_N(x)$，使得$\operatorname{supp}f_N(x)\subset B(0,C_N^1)$，$|f_N(x)|\leqslant C_N^2$，以及

$$\int|f(x)-f_N(x)|^p\mathrm{d}x\leqslant N^{-1}.$$

我们称$f(x)\in L_c^\infty(\mathbf{R}^n)$，如果$f(x)\in L^\infty(\mathbf{R}^n)$，并且其支集包含在某个球里. 称$f(x)\in S(\mathbf{R}^n)$，如果对于任意的$N>0$，$\alpha\in\mathbf{N}^n$，有

$$(1+|x|)^N|\partial_x^\alpha f(x)|\in L^\infty(\mathbf{R}^n).$$

这里$S(\mathbf{R}^n)$中的函数具有很好的光滑性和衰减性，通常被称为**实验函数空**

间，并且那些不好性质的函数经常被 $S(\mathbf{R}^n)$ 中函数来逼近，这种逼近大大地方便了我们进行研究.

下面给出卷积的定义. 设 $f(\boldsymbol{x}),g(\boldsymbol{x})$ 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的两个可测函数，若它们的乘积 $f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})g(\boldsymbol{y})$ 对 a. e. $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$ 是 $\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$ 的可积函数，则称

$$f*g(\boldsymbol{x})=\int f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})g(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y}$$

为 f 与 g 的**卷积**，且由变量替换 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{y}$，我们有

$$f*g(\boldsymbol{x})=\int f(\boldsymbol{y})g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y}.$$

利用上面的定理和推论可得到函数的光滑逼近定理：

定理1.6　给定 $1\leqslant p<\infty$. $\forall f(\boldsymbol{x})\in L^p(\mathbf{R}^n)$，$\exists f_n(\boldsymbol{x})\in S(\mathbf{R}^n)$，使得

$$\|f_n(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})\|_p\to 0.$$

证　令 $\int_{|\boldsymbol{x}|\leqslant 1} c\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{1-x^2}}\mathrm{d}\boldsymbol{x}=1$ 及

$$g(\boldsymbol{x})=\begin{cases} c\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{1-x^2}}, & \text{如果}\ |\boldsymbol{x}|\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他,}\end{cases}$$

则 $g(\boldsymbol{x})\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 且 $\int g(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=1$.

根据推论 1. 1，不妨设 $f(\boldsymbol{x})\in L_c^\infty(\mathbf{R}^n)$. 令 $g_t(\boldsymbol{x})=t^{-n}g\left(\frac{\boldsymbol{x}}{t}\right)$ 和 $f_t(\boldsymbol{x})=f*g_t(\boldsymbol{x})$，则很容易验证 $f_t(\boldsymbol{x})\in S(\mathbf{R}^n)$.

实际上，由于可以把对 $f_t(\boldsymbol{x})$ 的微分转化为对 $g_t(\boldsymbol{x})$ 的微分，由绝对可积性，微分可以拿到积分号里面，因此，$\forall\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{N}^n$，有

$$\begin{aligned}\partial_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{\alpha}}f_t(\boldsymbol{x})&=\int f(\boldsymbol{y})\partial_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{\alpha}}(g_t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))\mathrm{d}\boldsymbol{y}\\ &=t^{-n-|\boldsymbol{\alpha}|}\int f(\boldsymbol{y})(\partial_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{\alpha}}g)(t^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))\mathrm{d}\boldsymbol{y}.\end{aligned}$$

由于存在球 B_f 使得 $\operatorname{supp} f\subset B_f$，于是

$$\operatorname{supp}\partial_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{\alpha}}g(t^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))\subset\boldsymbol{y}+tB(0,1)\subset B_f+tB(0,1),$$

因此$(1+|\boldsymbol{x}|)^N\partial_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{\alpha}}g(\boldsymbol{x})\in L_c^\infty(\mathbf{R}^n)$；另外 $f(\boldsymbol{x})\in L_c^\infty(\mathbf{R}^n)$，故得

$$(1+|\boldsymbol{x}|)^N\partial_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{\alpha}}f_t(\boldsymbol{x})\in L^\infty.$$

另外，由于 g 的积分为 1，我们有

$$\int|f_t(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})|^p\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int\left|\int f(\boldsymbol{x}-t\boldsymbol{y})g(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y}-f(\boldsymbol{x})\int g(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y}\right|^p\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

$$=\int\left|\int(f(x-ty)-f(x))g(y)\mathrm{d}y\right|^p\mathrm{d}x.$$

如果 $1\leqslant p<\infty$，令 $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$，则由 Hölder 不等式，有

$$\begin{aligned}
&\int\left|\int(f(x-ty)-f(x))g(y)\mathrm{d}y\right|^p\mathrm{d}x\\
&\leqslant\int\left(\int|f(x-ty)-f(x)|\,|g(y)|^{\frac{1}{p}}|g(y)|^{\frac{1}{p'}}\mathrm{d}y\right)^p\mathrm{d}x\\
&\leqslant\int\left(\int|f(x-ty)-f(x)|^p|g(y)|\mathrm{d}y\right)\left(\int|g(y)|\mathrm{d}y\right)^{\frac{p}{p'}}\mathrm{d}x\\
&\leqslant\iint|f(x-ty)-f(x)|^p\mathrm{d}x\,|g(y)|\mathrm{d}y\left(\int|g(y)|\mathrm{d}y\right)^{\frac{p}{p'}}\\
&\leqslant\sup_{|y|\leqslant 1}\int|f(x-ty)-f(x)|^p\mathrm{d}x\left(\int|g(y)|\mathrm{d}y\right)^p.
\end{aligned}$$

因此

$$\int|f_t(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x\leqslant\sup_{|y|\leqslant 1}\|f(x-ty)-f(x)\|_p^p\left(\int|g(y)|\mathrm{d}y\right)^p.$$

利用定理 1.5 得到，当 $t\to 0$ 时有 $\int|f_t(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x\to 0$.

取 $f_n(x)=f_{\frac{1}{n}}(x)$，我们得到所需的光滑逼近的结论. ∎

注意 在实分析中对 $0<p\leqslant 1$ 和 $p>1$ 常常有不同的性质. 比如当 $0<p\leqslant 1$ 时有

$$\left(\sum_i|a_i|\right)^p\leqslant\sum_i|a_i|^p. \tag{1.8}$$

但当 $p>1$ 时没有上述性质. (1.8) 的证明可由

$$|a+b|^p\leqslant|a|^p+|b|^p \tag{1.9}$$

通过归纳法得到. 在(1.9) 中不妨设 $a=1$ 和 $0<b<1$，这样(1.9) 转化为

$$h(x)=(1+x)^p-x^p-1<0,\quad\forall\,0<p,x<1.$$

函数的非正性由 $h(x)$ 在 0 点为 0 和 $h'(x)=p((1+x)^{p-1}-x^{p-1})$ 在 $0<p,x<1$ 时为负得到.

由(1.8) 可直接导出，当 $0<p\leqslant 1$ 时，对于"好"性质的函数 $\varphi(x)$ 有

$$\left(\int\sum_i a_i\varphi(x-i)\mathrm{d}x\right)^p\leqslant C\int\sum_i|a_i|^p|\varphi(x-i)|^p\mathrm{d}x.$$

这一性质我们后面还会用到. 不过对于一般的 $f(x)\in L^p$ $(0<p<1)$ 并没有 $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)^p\leqslant C\int|f(x)|^p\mathrm{d}x$. 但是如果 $f(x)$ 具有紧支集，那么对于

$1<p<\infty$ 有 $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)^p \leqslant C\int |f(x)|^p \mathrm{d}x$.

1.4 Calderón-Zygmund 分解

在实际中，我们经常把函数分解成“好”函数和“坏”函数两部分，并分别用不同的技巧研究两个不同的部分. 鉴于 Calderón-Zygmund 分解在数学的很多领域经常用到，下面简单讨论一下著名的 Calderón-Zygmund 分解. 为适应不同的需要，Calderón-Zygmund 分解的形式有多种版本和变体，最容易找到的并不是我们这里的版本. 我们选取能把函数分解成其中一部分函数在二进方体上取值的这种来介绍，是因为小波与二进方体的关系，以后我们介绍大多数结果时也都强调二进方体，以便大家适应二进方体.

定理1.7 设 Q 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有限闭方体，$f\in L^1_{\mathrm{loc}}(Q)$；如果 Q 是 $\mathbf{R}^n$ 本身，还要求 f 满足

$$\lim_{|I|\to\infty}|I|^{-1}\int_I |f|\,\mathrm{d}x=0 \quad (I \text{ 是 } \mathbf{R}^n \text{ 中的方体}).$$

则 $\forall\lambda\geqslant |Q|^{-1}\int_Q |f|\,\mathrm{d}x$（当 $Q=\mathbf{R}^n$ 时 $\forall\lambda>0$），存在 Q 中不交方体族 $\{Q_k\}$，使得开集 $U=\bigcup_k Q_k$ 与闭集 $F=Q-U$ 满足

(i) $|f|\leqslant\lambda$, a. e. 于 F；

(ii) $\lambda<|Q_k|^{-1}\int_{Q_k}|f|\,\mathrm{d}x\leqslant 2^n\lambda$，$\forall k$；

(iii) $\sum_k |Q_k|\leqslant\lambda^{-1}\int_Q |f|\,\mathrm{d}x$.

此外，当 $\lambda<\mu$ 时，所得到的 $U_\lambda=\bigcup_k Q_k(\lambda)$ 与 $U_\mu=\bigcup_j I_j(\mu)$ 还满足：每个 $I_j(\mu)$ 必包含在某个 $Q_k(\lambda)$ 中.

证 首先把 $\mathbf{R}^n$ 化到有限 Q 的情况. 从原点出发，将 $\mathbf{R}^n$ 分为边长为 2^k $(k\in\mathbf{Z})$ 的二进方体的网. 任给 $\lambda>0$，则由条件 $\lim_{|I|\to\infty}|I|^{-1}\int_I |f|\,\mathrm{d}x=0$ 知，存在 $a_\lambda>0$，只要 $|I|$ 充分大，例如 $l(I)\geqslant a_\lambda$（$l(I)$ 表示 I 的边长），便有

$$|I|^{-1}\int_I |f|\,\mathrm{d}x\leqslant\lambda. \tag{1.10}$$

设 Q_0 是 $\mathbf{R}^n$ 的第一象限中以原点为一个顶点的满足 $l(Q_0)\geqslant a_\lambda$ 的二进方体，则得到 $\mathbf{R}^n$ 的由 Q_0 以及其平移构成的一个剖分. 注意到这个剖分中的每

一个方体都满足(1.10)，如果能对有限方体的情形得到定理的证明，自然便可推广到 $\mathbf{R}^n$ 的情形中. 因此，我们只需对有限的 Q_0 与 λ 作分解即可.

现设 Q_0 与 λ 满足(1.10). 考察 Q_0 的 2^n 个子二进方体中的每一个是否满足(1.10). 将不满足的挑出来作为未来的开集 U 的部分，将满足的留下来继续考察其子二进方体，如此继续，以至无穷. 这样得到一个由二进方体构成的 $\{Q_k\}$，它们是从逐步考察 Q_0 的子二进方体的过程中挑出来的，显然满足(ⅱ)中左边的不等式，从而也满足(ⅲ)中的不等式.（ⅱ）中右边的不等式得到满足是根据它的第一次性：设 $\tilde{Q}_k$ 是包含 Q_k 的母二进方体，则 $\tilde{Q}_k$ 不是被挑出来的，从而

$$|Q_k|^{-1}\int_{Q_k}|f|\,\mathrm{d}x \leqslant |\tilde{Q}_k|\,|Q_k|^{-1}|\tilde{Q}_k|^{-1}\int_{\tilde{Q}_k}|f|\,\mathrm{d}x \leqslant 2^n\lambda, \quad \forall k.$$

至于(ⅰ)是因为 $F=Q-\bigcup_k Q_k$ 中的每个点 x 都包含在边长趋于 0 的一个二进方体族中，而这个族中的每个二进方体 J 满足

$$|J|^{-1}\int_J|f|\,\mathrm{d}x \leqslant \lambda.$$

最后，设 $\lambda<\mu$. 由上述分解，我们可得到由 Q 的二进方体构成的两个开集 $U_\lambda=\bigcup_k Q_k(\lambda)$ 与 $U_\mu=\bigcup_j I_j(\mu)$. 由于

$$|I_j(\mu)|^{-1}\int_{I_j(\mu)}|f|\,\mathrm{d}x>\mu>\lambda, \quad \forall j,$$

则 $I_j(\mu)$ 中的每个点在关于 λ 所作的分解中一定位于被挑出来的部分，即 $\forall j$，$I_j(\mu)\subset U_\lambda$. 这样由二进方体的特性便知，存在 k 使得 $I_j(\mu)\subset Q_k(\lambda)$. ∎

习　题

1. 给出第一章所有 7 个定理在 1 维情况的证明.

2. 我们知道，对于 $g(x)=\pi^{-\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-x^2}$，有 $\int g(x)\mathrm{d}x=1$. 令 $g_t(x)=t^{-n}g\left(\frac{x}{t}\right)$. 证明：当 $t\to 0$ 时，有 $\|f*g_t(x)-f(x)\|_{L^1}\to 0$.

3. 证明广义 Hölder 不等式：给定 $1<p_s<\infty$ $(1<s\leqslant t)$ 和 $\sum_{1\leqslant s\leqslant t}\frac{1}{p_s}=1$，则有

$$\left\|\prod_{s=1}^{t}f_s\right\|_1 \leqslant \prod_{s=1}^{t}\|f_s\|_{p_s}.$$

4. 证明关于卷积的 Young 不等式：设 $1\leqslant p,q\leqslant\infty$ 和 $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1\geqslant 0$，则 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 与 $L^q(\mathbf{R}^n)$ 中的函数的卷积满足

$$\|f*g\|_r\leqslant\|f\|_p\|g\|_q.$$

小　结

我们首先回顾一下本章所介绍的内容. 1.1 节讲述了连续函数的阶梯逼近和线性逼近. 1.2 节讲述了 Lebesgue 空间 L^p 的 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式. 1.3 节介绍了 L^p 中的函数，虽然无逐点意义的逼近，但函数在定义域上的小扰动后与原函数的范数相差很小；然后利用卷积给出了它的光滑逼近. 1.4 节介绍了著名的 Calderón-Zygmund 分解. 这些都是进一步学习调和分析与实分析的基础.

调和分析自 1822 年由 Fourier 引进以来，到现在已经有两百多年的历史. 它已经广泛应用到数学和数学外的许多学科. 随着人们对它的本质的不断了解，它越来越向精确化的方向发展. 这种精确化已经在很大程度上脱离了 Fourier 分析而成为实分析；实分析技巧的发展直接为小波理论的发展奠定了基础，而小波又反过来推动了调和分析的更广泛的应用.

本书一开始讲了几个简单的函数空间，与这几个函数空间相关的不等式和技巧实际上也是进一步的实技巧的基础. Lebesgue 空间 L^p 是特殊的 Sobolev 空间，也是特殊的 Triebel-Lizorkin 空间，$p\neq 2$ 时它不属于 Besov 空间. 至于函数空间，我们可以结合加权、实插和 Hausdorff 测度等给出比 Triebel-Lizorkin 空间和 Besov 空间更一般的函数空间，它们几乎包含了我们常见的函数空间. 在[38] 和[49] 中已经部分考虑了这一点，建议读者参阅.

本课程的进一步的技巧可能对大多数人来讲比较抽象和高深. 其实大家将来只要从事与分析有关的工作，那些技巧也是必不可少的. 比如 Whitney 覆盖引理，插值定理，极大函数，加权模不等式，原子，与 Calderón-Zygmund 算子的连续性有关的实技巧，比 Calderón-Zygmund 分解更仔细的分解，等等. 大家如果对这些进一步的技巧感兴趣，可以参阅[53] 等.



第二章 Fourier 变换与调和函数边值

本章介绍部分经典的 Fourier 变换知识以及部分经典的调和函数基本性质，这是调和分析乃至现代分析的最基本知识.

Fourier 变换自出现以来，一直在分析中起着重要的作用，已经应用到数学的许多学科和数学以外的许多学科；某种意义下它已经成为理工科学生的必不可少的基本技能. 虽然大家认为小波在很多时候可以替代 Fourier 变换，但实际上，Fourier 变换已经发展了很多技巧；对于特定问题，这部分技巧很难用小波的方法简单替换，甚至小波本身的正则性等往往也是通过 Fourier 变换来给出的. 在处理问题时，我们最常遇到的是 L^p 函数，人们自然关心 L^p 函数的 Fourier 变换性质，这些性质与很多数学问题联系在一起. 在通常的函数意义下，我们无法研究 $L^p(2 < p \leqslant \infty)$ 的 Fourier 变换性质.

在本章 2.1 节和 2.2 节，我们研究 L^1 和 L^2 函数的 Fourier 变换性质. 关键的技巧是 Gauss 函数及其 Fourier 变换的良好性质；这些把性质不好的函数的研究在对偶意义下转化为性质很好的函数的研究为后来分布理论的发展准备了很好的理论基础. 其实，由 L^1 和 L^2 中函数的 Fourier 变换的性质，可以很自然地导出 $L^p(1 < p < 2)$ 的性质；不过，可能要用到一些插值空间的技巧，而这超出我们课程的范围，因此我们就不加以介绍. 函数的 Fourier 变换的性质在数学和应用的许多领域经常用到.

本章 2.3 节和 2.4 节介绍调和函数的几个经典的基本性质：(1) 调和函数与平均值的关系和极值原理；(2) 调和函数的边值和 Poisson 积分的关系. 在讲述 Poisson 积分时，我们将提醒大家注意这有一点可以类比于后面学习小波时的多分辨率分析概念.

2.1 L^1 理论

从经典意义来说，只有 L^1 中的函数才能定义 Fourier 变换；很自然地，本节考虑 L^1 函数的 Fourier 变换的 Riemann-Lebesgue 引理和 Fourier 变换的

逆定理. Fourier 变换是与我们的生活息息相关的，在进入数字电视之前，我们生活中的电视，电视台发射的不是图像或信号本身，而很可能是这些对象的 Fourier 变换；电视机接收的图像和信号很可能是通过 Fourier 逆变换再还原成我们可见的图像或可听的声音. 在进入数字化时代以后，电视台发射的更不是图像或信号本身，而很可能是经过小波处理以后的数字信号，在电视机接收的时候再利用小波进行还原.

设 $f(\boldsymbol{x}) \in L^1(\mathbf{R}^n)$，则称

$$\hat{f}(\boldsymbol{x}) = F(f)(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbf{R}^n} f(\boldsymbol{y}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}} \mathrm{d}\boldsymbol{y}$$

为 f 的 **Fourier 变换**，其中 $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 中的向量 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 与 $\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 的内积 $\sum_{s=1}^{n} x_s y_s$.

我们记 $C_0(\mathbf{R}^n)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上一致连续且在无穷远处为零的函数的集合. 那么我们有如下的引理：

引理 2.1 (Riemann-Lebesgue 引理) $\forall f \in L^1(\mathbf{R}^n)$，有 $\hat{f} \in C_0(\mathbf{R}^n)$.

证 我们只需证明 Fourier 变换的连续性和在无穷远处为零的性质. 对于前者，我们利用函数积分在无穷远处相当小和 Fourier 变换因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}}$ 的光滑性来证明；对于后者，我们把 Fourier 变换转换成两个函数之差的 Fourier 变换，利用这两个函数之差的范数相当小来证明.

(i) 首先证明 Fourier 变换的连续性. 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，可取充分大的 r 使得 $\int_{|\boldsymbol{x}|>r} |f(\boldsymbol{x})| \mathrm{d}\boldsymbol{x} < \frac{\varepsilon}{4}$ 和对于任意给定的 $\boldsymbol{x}$，可取充分小的正数 δ 使得当 $|\boldsymbol{h}| < \delta$ 时 $|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{x}\boldsymbol{h}} - 1| < \frac{\varepsilon}{2\|f\|_{L^1}}$. 由于

$$\hat{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - \hat{f}(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbf{R}^n} f(\boldsymbol{y})(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{x}\boldsymbol{h}} - 1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}} \mathrm{d}\boldsymbol{y},$$

这样当 $|\boldsymbol{h}| < \delta$ 时就有

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - \hat{f}(\boldsymbol{x})| &\leqslant \int_{\mathbf{R}^n} |f(\boldsymbol{y})| \, |\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{x}\boldsymbol{h}} - 1| \mathrm{d}\boldsymbol{y} \\ &\leqslant \int_{|\boldsymbol{y}|\leqslant r} |f(\boldsymbol{y})| \, |\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{x}\boldsymbol{h}} - 1| \mathrm{d}\boldsymbol{y} + 2\int_{|\boldsymbol{y}|\geqslant r} |f(\boldsymbol{y})| \mathrm{d}\boldsymbol{y} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

(ii) 接着再证明 Fourier 变换在无穷远处为零的性质. 设 $\boldsymbol{\eta} = \frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|^2}\pi$，

则有

$$\hat{f}(\boldsymbol{\xi})=\int e^{-i\boldsymbol{x}\boldsymbol{\xi}}f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=\int e^{-i(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\xi}}f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\eta})d\boldsymbol{x}=-\int e^{-i\boldsymbol{x}\boldsymbol{\xi}}f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\eta})d\boldsymbol{x};$$

这样一来就有

$$\hat{f}(\boldsymbol{\xi})=\frac{1}{2}\int e^{-i\boldsymbol{x}\boldsymbol{\xi}}(f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\eta}))d\boldsymbol{x}.$$

令 $|\boldsymbol{\xi}|\to\infty$，就有 $|\boldsymbol{\eta}|\to 0$. 因此

$$|\hat{f}(\boldsymbol{\xi})|\leqslant\frac{1}{2}\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\eta})\|_1\to 0.$$

我们不能只是关心 Fourier 变换后的对象的性质，我们还要关心 Fourier 变换后的对象能否变回原来的对象，这就是 Fourier 逆变换. 令

$$F^{-1}(g)(\boldsymbol{x})=(2\pi)^{-n}\int g(\boldsymbol{y})e^{i\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}}d\boldsymbol{y}$$

为 $g(\boldsymbol{x})$ 的 Fourier 逆变换. 我们首先看一个特殊的函数，Gauss 函数在 Fourier 变换中起重要作用，概率中的 Gauss 分布就是由其定义的；并且 Gauss 函数的 Fourier 变换也构成了小波中的重要小波框架. 令 $\beta>0$，$f(x)=e^{-x^2\beta}$，则 $\hat{f}(\xi)=(\pi\beta^{-1})^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{\xi^2}{4\beta}}$. 实际上，

$$\hat{f}(\xi)=\int e^{-x^2\beta}e^{-ix\xi}dx=e^{-\frac{\xi^2}{4\beta}}\int e^{-\beta\left(x+\frac{i\xi}{2\beta}\right)^2}dx=(\pi\beta^{-1})^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{\xi^2}{4\beta}}.$$

很容易验证上述 L^1 函数的 Fourier 变换的 Fourier 逆变换等于函数本身. 但一个 L^1 函数的 Fourier 变换的 Fourier 逆变换一般来说不等于函数本身，甚至于可以在无穷多个点是不同的. 比如说，令 $g(x)$ 为在所有无理点为 0，有理点为任意值的函数，则有 $\hat{g}(\xi)=0$ 和 $F^{-1}(\hat{g})(x)=0$.

不过，我们还是有

定理 2.1（Fourier 变换的逆定理） 若 $f\in L^1(\mathbf{R}^n)$，$\hat{f}\in L^1(\mathbf{R}^n)$，则

$$F^{-1}(\hat{f})(\boldsymbol{x})=F(F^{-1}f)(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}),\quad \text{a.e. } \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n.$$

证 由于证明的相似性，不妨只证 $F^{-1}(\hat{f})(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})$，a. e. $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$. 给定 $t>0$ 和 $g(\boldsymbol{x})=\pi^{-\frac{n}{2}}e^{-\boldsymbol{x}^2}$，令 $g_t(\boldsymbol{x})=\pi^{-\frac{n}{2}}t^{-n}e^{-\frac{|\boldsymbol{x}|^2}{t^2}}$，则有 $\hat{f}$ 的 Gauss 加窗 Fourier 逆变换 $(2\pi)^{-n}\int e^{-\frac{1}{4}t^2|\boldsymbol{\xi}|^2}e^{i\boldsymbol{x}\boldsymbol{\xi}}\hat{f}(\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi}$ 就是 f 与 Gauss 函数的卷积 $g_t*f(\boldsymbol{x})$. 事实上，我们把 $\hat{f}$ 的 Gauss 加窗 Fourier 变换的表达式写出来就有

$$(2\pi)^{-n}\int e^{-\frac{1}{4}t^2|\boldsymbol{\xi}|^2}e^{i\boldsymbol{x}\boldsymbol{\xi}}\hat{f}(\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi}=(2\pi)^{-n}\iint e^{-\frac{1}{4}t^2|\boldsymbol{\xi}|^2}e^{i(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\boldsymbol{\xi}}f(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{\xi}d\boldsymbol{y}.$$

由于绝对可积性，在右边先对 $\boldsymbol{\xi}$ 积分就得到

$$(2\pi)^{-n}\int e^{-\frac{1}{4}t^2|\xi|^2}e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)d\xi=\pi^{-\frac{n}{2}}\int f(y)t^{-n}e^{-\frac{|x-y|^2}{t^2}}dy=g_t*f(x).$$

由于 $f\in L^1$，由单位逼近有

$$\lim_{t\to 0}\|g_t*f-f\|_1=0.$$

由于 $\hat{f}\in L^1(\mathbf{R}^n)$，由控制收敛定理有

$$\lim_{t\to 0}(2\pi)^{-n}\int e^{-\frac{1}{4}t^2|\xi|^2}e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)d\xi=(2\pi)^{-n}\int e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)d\xi=F^{-1}(\hat{f})(x).$$

这就得到 $\|f(x)-F^{-1}(\hat{f})(x)\|_1=0$，由此而得到所需结论. ∎

2.2 $L^2(\mathbf{R}^n)$

大家知道，按通常收敛的意义，对于 L^2 中的一个函数，其定义的 Fourier 变换一般不存在(不过，后面学习分布理论时，我们知道在分布意义下是存在的). 虽然如此，L^2 中的函数的 Fourier 变换仍可在较自然的方法下根据 Hahn-Banach 延拓定理来导出；而且由于 L^2 是 Hilbert 空间，L^2 中的函数的 Fourier 变换理论还是最为完善的. 我们这里介绍与此相关的三个定理. 下面的 Parseval 等式由 Fourier 变换的逆定理和 Gauss 函数 $g(x)$ 的性质来证明：

定理 2.2 (Parseval 等式)　$\forall f\in L^1\cap L^2$，有 $\|f\|_2=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\|\hat{f}\|_2$.

证　由于 $f\in L^1\cap L^2$，因此对于 Gauss 函数 $g(x)$，我们有 $f*g_t(x)$ 和 $\hat{f}(x)\hat{g}(t\xi)$ 均属于 L^1. 这样由 Fourier 变换的逆定理有

$$\begin{aligned}\int|f*g_t(x)|^2dx&=\int f*g_t(x)\,\overline{f*g_t(x)}dx\\&=\int F^{-1}(F(f*g_t))(x)\,\overline{f*g_t(x)}dx.\end{aligned}$$

把 Fourier 逆变换的表达式代进去，并利用绝对可积性交换积分顺序，得到

$$\int|f*g_t(x)|^2dx=(2\pi)^{-n}\int(F(f*g_t))(x)\,\overline{F(f*g_t)(x)}dx.$$

再利用卷积的 Fourier 变换为 Fourier 变换的乘积，得到

$$\int|f*g_t(x)|^2dx=(2\pi)^{-n}\int|\hat{f}(x)\hat{g}(t\xi)|^2dx.$$

由于 $\int|f*g_t(x)|^2dx\to\int|f(x)|^2dx$，因此 $\int|\hat{f}(x)\hat{g}(t\xi)|^2dx$ 收敛为一个有界量，这导致 $\int|\hat{f}(x)|^2dx$ 有界. 另外 $\int|\hat{f}(x)\hat{g}(t\xi)|^2dx\to\int|\hat{f}(x)|^2dx$，这

样就有

$$\int |f(x)|^2 \mathrm{d}x = (2\pi)^{-n}\int |\hat{f}(x)|^2 \mathrm{d}x. \qquad \blacksquare$$

在具体计算中我们并不关心上面的 Parseval 等式中的常数，有时将上面的 Parseval 等式简单写成

$$\int |f(x)|^2 \mathrm{d}x = \int |\hat{f}(x)|^2 \mathrm{d}x.$$

上面的 Parseval 等式指出 Fourier 变换 F 是 $L^1 \cap L^2 \to L^2$ 的连续算子. 根据 Hahn-Banach 延拓定理，F 定义了一个 L^2 中所有函数的 Fourier 变换. 注意到 $f_t(x) = f * g_t(x)$ 与 $\hat{f}(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2t^2}{4}}$ 的关系，完全类似地采用上面的证明就可得到乘法公式.

定理2.3（乘法公式） 设 $f, g \in L^2(\mathbf{R}^n)$，则

$$\int \hat{f}(x)g(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\hat{g}(x)\mathrm{d}x.$$

证 证明本定理的关键在于如何让积分顺序可交换，为此我们利用 Gauss 函数把 $f(x)$ 和 $g(x)$ 变成“好函数”

$$f_s(x) = \pi^{-\frac{n}{2}} s^{-n}\int f(y)\mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{s^2}}\mathrm{d}y$$

和

$$g_t(x) = \pi^{-\frac{n}{2}} t^{-n}\int g(y)\mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{t^2}}\mathrm{d}y$$

来研究. 实际上，由于 $\hat{f}_s(x) = \hat{f}(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2s^2}{4}}$，我们有

$$\int \hat{f}(x)g_t(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2s^2}{4}}\mathrm{d}x = \int \hat{f}_s(x)g_t(x)\mathrm{d}x.$$

把 $\hat{f}_s(x)$ 的 Fourier 变换公式具体写出来，

$$\int \hat{f}(x)g_t(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2s^2}{4}}\mathrm{d}x = \iint f_s(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}yx}g_t(x)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

利用绝对可积性，在右边我们先对 x 积分，利用卷积的 Fourier 变换为 Fourier 变换的乘积，就得到

$$\int \hat{f}(x)g_t(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2s^2}{4}}\mathrm{d}x = \int f_s(y)\hat{g}(y)\mathrm{e}^{-\frac{y^2t^2}{4}}\mathrm{d}x.$$

然后分别令 $s \to 0$ 和 $t \to 0$ 就得到所需要的结论. $\blacksquare$

下面要用到结论：“对于 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 的一个闭的真子空间 E，存在 $0 \neq \varphi \in L^2(\mathbf{R}^n)$，使得 $\varphi \perp E$”. 这一点超出本教材，不介绍证明. 这里闭的这个条件

是不可少的；否则令 E 为 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 中所有阶梯函数组成的空间，则不存在非零的 $\varphi \in L^2(\mathbf{R}^n)$ 使得 $\varphi \perp E$. $L^2(\mathbf{R}^n)$ 上的酉算子是指算子范数为 1 的一一对应的满映射. 对于 Fourier 变换，更精确地有 Fourier 变换算子 F 在范数相差一个常数意义下，是 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 上的酉算子，即

定理2.4　F 是 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 上的酉算子.

证　Parseval 等式意味着 F 是等距的，下面证明 F 是满映射. 为此令

$$E=\{f:\ f=\hat{g},\ g \in L^2(\mathbf{R}^n)\},$$

则 E 是 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 的一个闭子空间. 假定 $E \neq L^2$，则有 $0 \neq \varphi \in L^2(\mathbf{R}^n)$，使得

$$\int f(\boldsymbol{x})\,\overline{\varphi(\boldsymbol{x})}\mathrm{d}\boldsymbol{x}=0, \quad \forall f \in E.$$

这就是说，对一切 $g \in L^2(\mathbf{R}^n)$，有

$$\int \hat{g}(\boldsymbol{x})\,\overline{\varphi(\boldsymbol{x})}\mathrm{d}\boldsymbol{x}=0.$$

由乘法公式有

$$\int g(\boldsymbol{x})\hat{\overline{\varphi}}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int \hat{g}(\boldsymbol{x})\,\overline{\varphi(\boldsymbol{x})}\mathrm{d}\boldsymbol{x}=0.$$

特别地，取 $g=\hat{\varphi} \in L^2(\mathbf{R}^n)$，得到 $\|\hat{\varphi}\|_2=0=\|\varphi\|_2$，由此而得 $E=L^2$. ∎

2.3　调和函数的基本性质

我们在学习复变函数时，大家对解析函数已经比较熟悉了，解析函数的实推广就是调和函数. 设 $u(\boldsymbol{x})=u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 定义于区域 $D \subset \mathbf{R}^n$ 上，在 D 上 $\frac{\partial}{\partial x_j}u(\boldsymbol{x})$ 存在且局部可积. 若

$$\Delta u(\boldsymbol{x})=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}u(\boldsymbol{x})\Big)=0, \quad \forall \boldsymbol{x} \in D,$$

则称 u 为 D 上的**调和函数**. 很明显，常数函数和一阶多项式是调和函数. 另外，对于 $D=\mathbf{R}_+^{n+1}=\{(t,\boldsymbol{x}):\ t>0,\ \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n\}$，函数 $t(t^2+|\boldsymbol{x}|^2)^{-\frac{n+1}{2}}$ 和 $x_j(t^2+|\boldsymbol{x}|^2)^{-\frac{n+1}{2}}$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 均为调和函数. 特殊的二阶多项式如 $f(x,y)=x^2-y^2$ 和 $g(x,y)=x^2-y^2+xy$，也是 $\mathbf{R}^2$ 上任意开区域的调和函数；不过这样的函数，在我们假设了调和函数的另外特殊性质下，可以被排除. 记 Σ 为单位球面，记 ω_n 为单位球面的面积. 调和函数具有很多类似于解析函数的性质，本节我们主要介绍平均值和极值性质. 首先介绍调和函数

的平均值性质：

定理2.5（调和函数的平均值性质） 设 $u(x)$ 在区域 $D\subset\mathbf{R}^n$ 上调和. 若 $\overline{B(x_0,r)}\subset D$，则

$$u(x_0)=|B(x_0,r)|^{-1}\int_{\overline{B(x_0,r)}}u(x)\mathrm{d}x=\omega_n^{-1}\int_{\Sigma}u(x_0+rx')\mathrm{d}x'.$$

证 我们只须证明在球面上的结果：

$$u(x_0)=\omega_n^{-1}\int_{\Sigma}u(x_0+rx')\mathrm{d}x'.$$

为证明上式，记 $f(s)=\omega_n^{-1}\int_{\Sigma}u(x_0+sx')\mathrm{d}x'$，我们通过调和函数的性质来证明其导数为 0.

显然，f 是$(0,r]$ 上的可微函数，且有

$$f'(s)=\omega_n^{-1}\int_{|x'|=1}\sum_{j=1}^{n}u'_{x_j}(x_0+sx')x'_j\mathrm{d}x'.$$

易知其中的被积函数等于 $\mathrm{D}_{x'}u(x_0+sx')$，这是 u 在点 $x=x_0+sx'$ 处外法线方向上的导数. 令 σ_s 表示球面 $\partial B(x_0,s)$ 上的 Lebesgue 测度，从而又有

$$f'(s)=s^{1-n}\omega_n^{-1}\int_{\partial B(x_0,s)}\mathrm{D}_{x'}u(x)\,\mathrm{d}\sigma_s(x).$$

然后应用 Green 公式，可得

$$f'(s)=s^{1-n}\omega_n^{-1}\int_{B(x_0,s)}\Delta u(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

这说明在 $s\in(0,r]$ 上函数 $f(s)$ 为常数.

因为同时有 $\lim\limits_{s\to0}f(s)=u(x_0)$ 和 $\lim\limits_{s\to r}f(s)=f(r)$，这样就有 $f(r)=u(x_0)$. ∎

定理2.6 设 $u\in C^{(2)}(D)$，且在 D 上具有平均值性质，则 u 是 D 上的调和函数.

证 固定 $x_0\in D$，且 $\overline{B(x_0,r)}\subset D$，则有

$$u(x_0)=\omega_n^{-1}\int_{\Sigma}u(x_0+rx')\mathrm{d}x'.$$

可知上式右端对 r 求导等于零，因为 $u\in C^{(2)}(D)$，所以

$$0=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\left(\omega_n^{-1}\int_{\Sigma}u(x_0+rx')\mathrm{d}x'\right)=\omega_n^{-1}\int_{\Sigma}\sum_{j,k=1}^{n}u''_{j,k}(x_0+rx')x'_jx'_k\mathrm{d}x'.$$

考虑到在 $r=0$ 点的导数，又有

$$0=\text{上式右端}=\omega_n^{-1}\sum_{j,k=1}^{n}\left(\int_{\Sigma}x'_jx'_k\mathrm{d}x'\right)u''_{j,k}(x_0).$$

注意到$\int_{\Sigma} x'_j x'_k \mathrm{d}\boldsymbol{x}'=0$，$j\neq k$ 和$\int_{\Sigma}(x'_j)^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}'=\omega_n n^{-1}$，于是得到

$$0=n^{-1}\sum_{j=1}^{n}u''_{jj}(\boldsymbol{x})=n^{-1}\Delta u(\boldsymbol{x}).$$ ∎

本节最后我们介绍调和函数的极值原理：

定理2.7（调和函数的极值原理） 设 $u(\boldsymbol{x})$ 在连通区域 $D\subset\mathbf{R}^n$ 上调和，且 $M=\sup\limits_{\boldsymbol{x}\in D}u(\boldsymbol{x})<\infty$，则 $u(\boldsymbol{x})<M$，$\forall\,\boldsymbol{x}\in D$ 或 $u(\boldsymbol{x})=$常数.

证 假定存在 $\boldsymbol{x}_0\in D$，使得$u(\boldsymbol{x})\leqslant u(\boldsymbol{x}_0)=M$，$\boldsymbol{x}\in D$. 则取$r>0$，使得$\overline{B(\boldsymbol{x}_0,r)}\subset D$，我们有

$$|B(\boldsymbol{x}_0,r)|^{-1}\int_{B(\boldsymbol{x}_0,r)}u(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=u(\boldsymbol{x}_0)=M.$$

因为 u 是连续函数，所以必有

$$u(\boldsymbol{x})=M,\quad \forall\,\boldsymbol{x}\in B(\boldsymbol{x}_0,r).$$

这说明点集 $E=\{\boldsymbol{x}\in D:\ u(\boldsymbol{x})=M\}$ 是非空开集. 但是点集 $D\backslash E=\{\boldsymbol{x}\in D:\ u(\boldsymbol{x})<M\}$ 也是开集，从而根据 D 的连通性可知 $D\backslash E=\varnothing$. ∎

2.4 调和函数的边值与 Poisson 积分

上一节我们比较了调和函数与解析函数的一些相同的性质，谈到调和函数时，是把它作为在 Laplace算子作用下为 0 的函数出现的. 本节我们将进一步说明调和函数是作为解析函数的推广出现的，通过 Poisson 核来证明调和函数在区域上的值被边界上的值所决定，某种意义上，一个调和函数在区域上的值就是一个任意函数的 Poisson 过程在给定时间时所取的值. 在复平面的情形，$F=u+\mathrm{i}v$ 是平面某区域的解析函数，一个等价的说法是，实函数对 (u,v) 是该区域某个实调和函数的梯度. 由此而来，设 $\boldsymbol{F}=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 是定义在该区域的向量值函数，我们称 F 是该区域上的 **Stein-Weiss 解析函数**，如果 F 是该区域上某个实调和函数的梯度. Stein-Weiss 解析函数有时也称为**共轭调和函数系**.

令 $r=\left(t^2+\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$，则 $\boldsymbol{F}=\left(\frac{t}{r^{n+1}},\frac{x_1}{r^{n+1}},\cdots,\frac{x_n}{r^{n+1}}\right)$ 是 $\mathbf{R}_+^{n+1}$ 上的共轭调和函数系. 对定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的 f，函数系$\frac{x_j}{r^{n+1}}*f$，$x_0=t$，$j=0,1,\cdots,n$ 在 $\mathbf{R}_+^{n+1}$ 上是共轭调和的. 令 $P(\boldsymbol{x})=C_n(1+|\boldsymbol{x}^2|)^{-\frac{n+1}{2}}$ 和 $P_t(\boldsymbol{x})=t^{-n}P\left(\frac{\boldsymbol{x}}{t}\right)$，此处 C_n 是

使 $P(x)$ 的积分为1的常数，则称 $P_t(x)$ 为 $\mathbf{R}^{n+1}_{+}$ 上的**Poisson核**，$P_t * f(x)$ 称为 f 的**Poisson积分**. 函数系 $C_n \frac{x_j}{r^{n+1}} * f$，$x_0=t$，$j=0,1,\cdots,n$ 的第一个分量其实就是 f 的 Poisson 积分；其他分量是 f 的共轭 Poisson 积分.

易知下述性质成立：

（ⅰ） $P(x)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的非负递减的径向函数；

（ⅱ） $\int P_t(x)\mathrm{d}x=1$，$t>0$；

（ⅲ） $P_t(x)$ 是 $\mathbf{R}^{n+1}_{+}$ 上的调和函数.

虽然，Poisson 核 $P(x)$ 不具有强衰减性，这比我们前面讲到的磨光子性质差，但正是由于有了 Poisson 核，可以在调和函数与小波中的多分辨率分析之间建立某种程度的类似，可以相互借鉴二者的一些数学处理技巧. 将调和函数与 Poisson 核联系起来后，调和分析的问题就转化为实分析的问题. 下面简单介绍一下调和函数的边值与 Poisson 积分的关系.

设 f 是 $\mathbf{R}^n$ 上的局部可积函数. 对每一点 $x \in \mathbf{R}^n$，定义 f 的 **Hardy-Littlewood 极大函数** Mf 为

$$Mf(x)=\sup |Q|^{-1}\int_Q |f(y)|\,\mathrm{d}y,$$

其中上确界是对包含 x 的所有方体取的. 于是，当 $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$，并且 u 是 f 的 Poisson 积分时，u 的边值几乎处处存在且等于 f，即

$$\lim_{t\to 0} u(x,t)=f(x), \quad \forall \text{ a. e. } x \in \mathbf{R}^n,$$

并且 $\|u(\cdot,t)\|_p \leqslant \|f\|_p$.

实际上，我们有

定理2.8 设 $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$，$1\leqslant p\leqslant\infty$，$u$ 是 f 的 Poisson 积分，则

（ⅰ） 当 $1\leqslant p<\infty$ 时，$\|u(\cdot,t)-f(\cdot)\|_p \to 0$ $(t\to 0)$；

（ⅱ） 若 f 在 $\mathbf{R}^n$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$，则当 $t\to 0$ 时，$u(x,t)$ 对 $x \in \mathbf{R}^n$ 一致收敛于 $f(x)$.

证 根据定义，有

$$|u(x,t)-f(x)|=\left|\int f(x-y)P_t(y)\mathrm{d}y-f(x)\right|.$$

根据 Poisson 核积分为 1 的性质，可得到

$$|u(x,t)-f(x)|=\left|\int (f(x-y)-f(x))P_t(y)\mathrm{d}y\right|$$

$$\leqslant \int |f(x-y)-f(x)| P_t(y)\mathrm{d}y.$$

对于任意 $\delta > 0$，将积分区域分成两部分，有

$$|u(x,t)-f(x)| \leqslant \int_{|y|\leqslant\delta} |f(x-y)-f(x)| P_t(y)\mathrm{d}y + \int_{|y|\geqslant\delta} |f(x-y)-f(x)| P_t(y)\mathrm{d}y.$$

（ⅰ）运用 Minkowski 不等式直接估计 Poisson 积分与函数之差的范数，可得到

$$\|u(\cdot,t)-f(\cdot)\|_p \leqslant \left\|\int_{|y|\leqslant\delta} |f(x-y)-f(x)| P_t(y)\mathrm{d}y\right\|_p + \left\|\int_{|y|\geqslant\delta} |f(x-y)-f(x)| P_t(y)\mathrm{d}y\right\|_p.$$

将被积函数 $|f(x-y)-f(x)|P_t(y)$ 拆成 $|f(x-y)-f(x)|P_t(y)^{\frac{1}{p}}$ 和 $P_t(y)^{\frac{p-1}{p}}$ 两部分，分别对变量 y 运用 Hölder 不等式，得到

$$\begin{aligned}
&\|u(\cdot,t)-f(\cdot)\|_p \\
&\leqslant \left[\iint_{|y|\leqslant\delta} |f(x-y)-f(x)|^p P_t(y)\mathrm{d}y\left(\int_{|y|\leqslant\delta} P_t(y)\mathrm{d}y\right)^{p-1}\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + \left[\iint_{|y|\geqslant\delta} |f(x-y)-f(x)|^p P_t(y)\mathrm{d}y\left(\int_{|y|\geqslant\delta} P_t(y)\mathrm{d}y\right)^{p-1}\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \left(\iint_{|y|\leqslant\delta} |f(x-y)-f(x)|^p P_t(y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{|y|\leqslant\delta} P_t(y)\mathrm{d}y\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\quad + \left(\iint_{|y|\geqslant\delta} |f(x-y)-f(x)|^p P_t(y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{|y|\geqslant\delta} P_t(y)\mathrm{d}y\right)^{\frac{p-1}{p}}.
\end{aligned}$$

交换积分顺序，得到

$$\begin{aligned}
&\|u(\cdot,t)-f(\cdot)\|_p \\
&\leqslant \left(\max_{|y|\leqslant\delta}\int |f(x-y)-f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{|y|\leqslant\delta} P_t(y)\mathrm{d}y\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\quad + \left(\max_{|y|\geqslant\delta}\int |f(x-y)-f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{|y|\geqslant\delta} P_t(y)\mathrm{d}y\right)^{\frac{p-1}{p}}.
\end{aligned}$$

根据 Poisson 核性质有

$$\int_{|y|\leqslant\delta} P_t(y)\mathrm{d}y \leqslant 1,$$

$$\int_{|y|\geqslant\delta} P_t(y)\mathrm{d}y = \int_{|y|\geqslant t^{-1}\delta} P(y)\mathrm{d}y.$$

于是

$$\|u(\cdot,t)-f(\cdot)\|_p \leqslant \max_{|y|\leqslant\delta}\|f(x-y)-f(x)\|_p + C\|f(x)\|_p\left(\int_{|y|\geqslant t^{-1}\delta}P(y)\mathrm{d}y\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

选取特殊的 $\delta=t(1+|\log t|)$，则当 $t\to 0$ 时，变量 $\delta\to 0$，$t^{-1}\delta\to\infty$. 从而 $\max\limits_{|y|\leqslant\delta}\|f(x-y)-f(x)\|_p$ 和 $\int_{|y|\geqslant t^{-1}\delta}P(y)\mathrm{d}y$ 均趋向 0. 因此，当 $t\to 0$ 时，$\|u(\cdot,t)-f(\cdot)\|_p$ 趋向 0.

（ⅱ） 由于 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$，则对于任意固定的充分小的正数 ε，存在 $\delta_{1,\varepsilon}>1$，使得当 $|x|>\delta_{1,\varepsilon}$ 时有 $|f(x)|<\frac{\varepsilon}{4}$. 由于 f 在 $\mathbf{R}^n$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $|x|\leqslant 2\delta_{1,\varepsilon}$ 上一致有界，即 $|f(x)|\leqslant C_\varepsilon$. 由 f 在 $\mathbf{R}^n$ 上连续还可推出 $f(x)$ 在 $|x|\leqslant 2\delta_{1,\varepsilon}$ 时一致连续，因此存在 $\delta_{2,\varepsilon}<1$，使得当 $|x|\leqslant 2\delta_{1,\varepsilon}$，$|y|\leqslant\delta_{2,\varepsilon}$ 时

$$|f(x-y)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

再根据 $P(y)$ 的性质，存在 $\delta_{3,\varepsilon}>1$ 使得 $\int_{|y|>\delta_{3,\varepsilon}}P(y)\mathrm{d}y<\frac{\varepsilon}{2C_\varepsilon}$，即

$$\int_{|y|>t\delta_{3,\varepsilon}}P_t(y)\mathrm{d}y<\frac{\varepsilon}{2C_\varepsilon}.$$

下面分两种情况估计 $|u(x,t)-f(x)|$.

当 $|x|<2\delta_{1,\varepsilon}$，$t<\delta_{3,\varepsilon}^{-1}\delta_{2,\varepsilon}$ 时，有

$$\begin{aligned}|u(x,t)-f(x)| &\leqslant \int_{|y|\leqslant t\delta_{3,\varepsilon}}|f(x-y)-f(x)|P_t(y)\mathrm{d}y \\ &\quad+\int_{|y|\geqslant t\delta_{3,\varepsilon}}|f(x-y)-f(x)|P_t(y)\mathrm{d}y \\ &\leqslant \sup_{|y|\leqslant\delta_{2,\varepsilon}}|f(x-y)-f(x)|+C_\varepsilon\int_{|y|>t\delta_{3,\varepsilon}}P_t(y)\mathrm{d}y \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

当 $|x|\geqslant 2\delta_{1,\varepsilon}$，$t<\delta_{3,\varepsilon}^{-1}\delta_{2,\varepsilon}$ 时，有

$$\begin{aligned}|u(x,t)-f(x)| &\leqslant \int_{|y|\leqslant t\delta_{3,\varepsilon}}|f(x-y)-f(x)|P_t(y)\mathrm{d}y \\ &\quad+\int_{|y|\geqslant t\delta_{3,\varepsilon}}|f(x-y)-f(x)|P_t(y)\mathrm{d}y \\ &\leqslant \sup_{|x|\geqslant 2\delta_{1,\varepsilon},\ |y|\leqslant\delta_{2,\varepsilon}}(|f(x-y)|+|f(x)|) \\ &\quad+C_\varepsilon\int_{|y|>t\delta_{3,\varepsilon}}P_t(y)\mathrm{d}y \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

■

另外，$\mathbf{R}_+^{n+1}$ 上的调和函数一定是 $\mathbf{R}^n$ 上的函数的 Poisson 积分. 于是，有如下定理：

定理 2.9 设 $u(x,t)$ 在 $\mathbf{R}_+^{n+1}$ 上调和，且 $\sup\limits_{t>0}\|u(\cdot,t)\|_p<\infty$，则当 $1<p\leqslant\infty$ 时，存在 $f\in L^p(\mathbf{R}^n)$ 使得 u 是 f 的 Poisson 积分，

$$u(\boldsymbol{x},t)=P_t(f)(\boldsymbol{x}).$$

证 由 $\sup\limits_{t>0}\|u(\cdot,t)\|_p<\infty$，$1<p\leqslant\infty$，知存在序列 $\{t_k\}$，$t_k\to0$ $(k\to\infty)$，使得 $u(\boldsymbol{x},t_k)$ 能够弱 * 收敛于某个 $f\in L^p$：即对 $\frac{1}{p^{-1}}+\frac{1}{p'}=1$ 和任意 $g\in L^{p'}$，下式成立：

$$\int_{\mathbf{R}^n}u(\boldsymbol{y},t_k)g(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y}\to\int_{\mathbf{R}^n}f(\boldsymbol{y})g(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y}\quad(k\to\infty).$$

对任意 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$，$t>0$，取 $g(\boldsymbol{y})=P_t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$，便得

$$\int_{\mathbf{R}^n}u(\boldsymbol{y},t_k)P_t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y}\to\int_{\mathbf{R}^n}f(\boldsymbol{y})P_t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y}=P_t(f)(\boldsymbol{x}).\quad(2.1)$$

由于 $u(\boldsymbol{y},t)$ 在 $\mathbf{R}_+^{n+1}$ 上调和，而上式左边正是 $f_k(\boldsymbol{x})=u(\boldsymbol{x},t_k)$ 的 Poisson 积分，由定理 2.8，$u(\boldsymbol{x},t+t_k)$ 在 $t\to0$ 时为 $f_k(\boldsymbol{x})=u(\boldsymbol{x},t_k)$. 于是，调和函数 $u(\boldsymbol{x},t+t_k)-f_k*P_t(\boldsymbol{x})$ 在 $t=0$ 时为 0，从而根据极值原理恒为 0；因此 $f_k(\boldsymbol{x})$ 的 Poisson 积分等于 $u(\boldsymbol{x},t+t_k)$.

因此，当 $t_k\to0$ 时，$u(\boldsymbol{x},t+t_k)\to u(\boldsymbol{x},t)$. 再由(2.1)，就证明了结论 $u(\boldsymbol{x},t)=P_t(f)(\boldsymbol{x})$. ∎

注释 (1) 由两个调和函数边界上相等得到区域上相等是有条件的，这条件是两个函数本身在区域上一致有界. 否则，特殊的二阶多项式如 $f(x,y)=x^2-y^2$ 和 $g(x,y)=x^2-y^2+xy$ 是 $\mathbf{R}_+^2$ 上的调和函数，它们边界上的值相等，但在区域 $\mathbf{R}_+^2$ 上的值不等.

(2) 当 $p=1$ 时，也有类似定理 2.9 的情形. 实际上，存在有限 Borel 测度 μ，$\int_{\mathbf{R}^n}|\mathrm{d}\mu|<\infty$，使得 u 是 μ 的 Poisson 积分：

$$u(\boldsymbol{x},t)=P_t(\mu)(\boldsymbol{x}).$$

对于一般的 $0<p\leqslant1$，人们常把 L^p 用具有原子分解的 Hardy 空间 H^p 来替代；这时共轭函数系与 $\mathbf{R}_+^{n+1}$ 上的 H^p 空间是通过证明 Riesz 算子的连续性给出的. 可以用 Calderón-Zygmund 算子理论等来很好地讨论，但这超出我们课程的内容.

 习　题

1. 设 $f(x) \in L^1(\mathbf{R})$，且有

$$\int_{R^1} |f(x+t)-f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant |t|^2, \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

证明：$f(x)=0$，a. e. $x \in \mathbf{R}$.

提示：应用 $\|\hat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1$ 可知 $\|(\mathrm{e}^{it}-1)\hat{f}\|_\infty \leqslant |t|^2$.

2. 证明：存在常数 C 使得函数 $\mathrm{e}^{-t|\xi|}$ 的 Fourier 变换是 $CP_t(x)$.

3. 找出一个 $\mathbf{R}_+^{n+1}$ 上的函数 $f(t,\boldsymbol{x})=f(t,x_1,\cdots,x_n)$，使得 $f(t,\boldsymbol{x})$ 的梯度

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}f(t,x_1,\cdots,x_n),\frac{\partial}{\partial x_1}f(t,x_1,\cdots,x_n),\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}f(t,x_1,\cdots,x_n)\right)$$

等于向量值函数 $\boldsymbol{F}=\left(\frac{t}{r^{n+1}},\frac{x_1}{r^{n+1}},\cdots,\frac{x_n}{r^{n+1}}\right)$，此处 $r=\sqrt{t^2+x_1^2+\cdots+x_n^2}$.

4. 对于 $n \in \mathbf{N}$，令 $\chi_n(x)$ 为区间 $\left[-\frac{1}{2n},\frac{1}{2n}\right]$ 上的特征函数，并令

$$f_n(x)=\sqrt{n}\,\hat{\chi}_n(x), \quad \tilde{f}_n=\overline{f_n(-x)}.$$

证明：f_n 的 L^2 范数为常数，且当 $n\to\infty$ 时，$f_n * \tilde{f}_n(x)$ 在紧集上一致收敛到函数 1.

5. 设 $\{f_j\}$ 是 $L^1(\mathbf{R}^n)$ 中的 Cauchy 列. 证明：存在 $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ 使得当 $j\to\infty$ 时，$\{\hat{f}_j\}$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中一致收敛于 $\hat{f}$.

6. 证明：集合 $\{f \in L^1(\mathbf{R}^n): \hat{f} \in L^1(\mathbf{R}^n)\}$ 在 $L^1(\mathbf{R}^n)$ 中稠密.

7. 证明调和函数的最小值原理：设 u 为区域 Ω 内的调和函数，且满足 $B=\inf\limits_{x\in\Omega} u(\boldsymbol{x}) > -\infty$. 如果 u 不是常值函数，那么 $\forall \boldsymbol{x} \in \Omega$，有 $u(\boldsymbol{x}) > B$.

8. 设 $n\geqslant 2$，$\mathrm{D}=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$，且 $P(\mathrm{D})$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上的常系数微分多项式. 记 $-\Delta$ 为 Laplace 算子，$I=(-\Delta)^0$ 为恒等算子. 证明下面两点等价：

(1) 对于 $\mathbf{R}^n$ 上的一切旋转 R_ρ，$P(\mathrm{D})R_\rho=R_\rho P(\mathrm{D})$；

(2) 存在常数 $C_j\,(j=0,1,\cdots,m)$ 使得 $P(\mathrm{D})=\sum\limits_{0\leqslant j\leqslant m} C_j(-\Delta)^j$.

9. 设 Ω 是有界连通开集，$\partial\Omega$ 为 Ω 的边界，$u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ 满足方程

$$\begin{cases}\Delta u+\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\dfrac{\partial}{\partial x_i}u\right|^2-u=0, & \forall x \in \Omega,\\ u=0, & \forall x \in \partial\Omega.\end{cases}$$

试证：$u \equiv 0$，$\forall x \in \overline{\Omega}$.

提示：用反证法，考虑 u 的最大值(最小值) 点处 Δu 的符号.

小 结

通过 2.1 节和 2.2 节的介绍，我们知道 Fourier 变换并不是除 L^2 外的函数空间的等距算子，甚至连 L^2 函数都不能直接给出其 Fourier 变换的定义. 而具有原子分解的 Hardy 空间 H^p 的研究和相对应它的对偶空间 BMO 空间的研究在数学和其他学科的很多分支起着重要的作用. 德国数学家 Triebel 在 20 世纪 70 年代就将绝大多数函数空间分成两类，我们可以从他在 1983 年的名著中看到，他把绝大多数函数空间通过 Fourier 变换和 Littlewood-Paley 分解(某种意义上就是单位分解) 来统一描述成 Triebel-Lizorkin 空间和 Besov 空间两类. 其实，他们的插值空间也可以以此来描述，参见参考文献[80]. 更为广泛的空间参见[38],[49] 和[78]，他们把 Morrey 空间、Q 空间等包含进去了. 本书作者最近发现，通过限制考虑一组同时频率和空间局部化的函数，可以定义更一般的 6 个指标的函数空间. Triebel 的描述直接与单位逼近和 Fourier 变换把光滑性变为衰减性，把衰减性变为光滑性有关. 在后面的分布空间理论中，我们将介绍其中的部分结果. 这些更一般的空间的研究不只是在数学理论上存在背景，在数学以外的领域同样需要. 比如在进行图像处理时，图像光滑的地方和不光滑的地方通常用不同的方式进行研究，这就需要进一步的函数空间的知识，也需要进一步的算子理论的知识. 由于课程限制，我们无法进一步展开来讲.

一方面，调和函数是作为解析函数的实部和虚部出现的；另一方面，在复平面的情形，$F = u + \mathrm{i}v$ 是平面某区域的解析函数，一个等价的说法是，实函数对(u, v) 是该区域某个实调和函数的梯度. 在高维情形，Stein-Weiss 解析函数是指满足所谓的"广义 Cauchy-Riemann 方程" 的共轭调和函数系. 但是，T. Wolff 证明过，当 $n \geqslant 2$ 时，存在 $\mathbf{R}_+^{n+1}$ 上不恒等于零的共轭调和函数系，它 $C^a(a > 0)$ 连续到边界 $\mathbf{R}^n$，但在 $\mathbf{R}^n$ 的一个正测度集合上为 0. 从这可看出，共轭调和函数系虽然是作为解析函数的高维推广，但本质上两者是有区别的.

不过，共轭调和函数系的引进确实给我们的研究带来了很大的方便，因为共轭调和函数系 $\boldsymbol{F} = \left(\frac{t}{r^{n+1}}, \frac{x_1}{r^{n+1}}, \cdots, \frac{x_n}{r^{n+1}}\right)$ 对应的算子就是最典型的卷积型

的 Calderón-Zygmund 算子. 这样一来，调和函数性质的研究就变成了卷积型算子的连续性研究.



第三章　分布理论

前面我们讲述的理论均是针对可测函数，但是我们在考虑一个函数的 Fourier 变换时就会发现一些很好的函数都可以没有 Fourier 变换，比如常值函数 1. 另外在实际中我们会遇到一些不可测函数的例子，比如 δ 函数等.

作为广义函数的萌芽的 δ 函数经历了从被人嘲笑到被人普遍认同的全过程. 1926 年物理学家 P. A. M. Dirac 从集中于点 $x=0$ 的单位物理量的分布密度出发，猜想存在某种函数

$$\delta(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ \infty, & x=0,\end{cases} \tag{3.1}$$

可以施行传统的积分运算，且满足

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\mathrm{d}x=1, \tag{3.2}$$

它作用在任一连续函数 $\varphi(x)$ 上有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\varphi(0). \tag{3.3}$$

满足(3.1) 的 $\delta(x)$ 几乎处处为 0，因而从 Lebesgue 积分的观点看，满足 (3.1) 的函数的积分为 0；这就与(3.2) 矛盾，用经典的分析理论很难解释. 但 Dirac 将具有性质(3.3) 的 δ 函数应用于量子理论的表述中取得了巨大的成功，与实验结果相吻合.

1936 年 Sobolev 在研究双曲型方程 Cauchy 问题的解的唯一性时提出了广义解概念，揭示了用泛函拓展可积函数的可能性. 1950—1951 年 Schwartz 出版的专著《分布理论》将广义函数定义成基本函数空间上的连续线性泛函，由此建立了严密而系统的理论，并且获得一系列有深远意义的成果，不久为世人所公认，Schwartz 因为分布理论而于 1950 年荣获菲尔兹奖. 分布理论不是数学家们关在自己的房间里凭空想象出来的理论.

现代分析的基础直到分布理论的诞生才奠定. 广义函数理论主要研究基本函数空间上的连续线性泛函，在某种意义下，广义函数可以看做通常函数概念的推广. 分布理论的一些基本知识已成为与数学有关领域的基本知识.

本章将介绍分布理论的一些最基本的知识. 为简化记号的书写，我们常忽略共轭符号，很多时候不区分内积$\langle f,g\rangle$和$\langle f,\overline{g}\rangle$. 读者也可以把我们的问题理解成实值的，如果是复值则自动加上共轭符号即可.

3.1 实验函数

在本节我们假设大家知道范数、半范和距离的定义；如果未学过，只需接受本节中的定义即可. 分布的基础是建立在实验函数与对偶的基础上的. 为非数学专业的同学着想，我们这里就说分布与广义函数是同一回事. 实验函数空间是指具有好性质的函数空间，通常指$C^\infty(\mathbf{R}^n)$,$S(\mathbf{R}^n)$和$C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$中的一种，也可以把$\mathbf{R}^n$换成光滑流形. 一般来说，我们需要介绍$C^\infty(\mathbf{R}^n)$, $S(\mathbf{R}^n)$和$C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$以及将$\mathbf{R}^n$换成光滑流形的情况. 基于本课程的目标，下面我们只介绍 **Schwartz 空间** $S(\mathbf{R}^n)$ 或称之为**速降函数空间**:

定义3.1 $\varphi\in S(\mathbf{R}^n)$，如果对于任意的多重指标$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{N}^n$，有

$$\rho_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(\varphi)=\sup_{x\in\mathbf{R}^n}|\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}\mathrm{D}^{\boldsymbol{\beta}}\varphi(\boldsymbol{x})|<\infty.$$

回顾一下范数和半范的定义：给定数集Φ. 设X为线性空间，若$\forall x\in X$，对应有实数$p(x)$，使得

(1) $p(x)\geqslant 0$, $\forall x\in X$;

(2) $p(ax)=|a|p(x)$, $\forall a\in\Phi$, $\forall x\in X$;

(3) $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$, $\forall x,y\in X$,

则称p是X上的**半范**. 若还有

(4) 若$p(x)=0$，则$x=0$,

则称p是X上的**范数**.

对于复数集Φ，容易验证定义3.1中的$\rho_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$具有如下性质：

定理3.1 (i) 每一个$\rho_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$均是$S(\mathbf{R}^n)$上的半范，实际上还是$S(\mathbf{R}^n)$上的范数.

(ii) 每一个$\rho_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$均是$C^\infty(\mathbf{R}^n)$上的半范，但$\rho_{\mathbf{0},\boldsymbol{\beta}}$不可能是$C^\infty(\mathbf{R}^n)$上的范数.

每个$\rho_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$都可以定义一个距离：

$$d_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(\varphi,\psi)=\rho_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(\varphi-\psi),\quad\forall\varphi,\psi\in S(\mathbf{R}^n).$$

回顾一下距离的定义：设 X 为某个集合，若 $\forall x,y\in X$，对应有实数 $\rho(x,y)$，满足

(1) $\rho(x,y)\geqslant 0$，且有 $\rho(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$；

(2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$；

(3) $\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$，

则称 ρ 是 X 上的**距离函数**，称 X 为**度量空间**.

定理3.2 上述的每一个 $d_{\alpha,\beta}$ 均是 $S(\mathbf{R}^n)$ 上的距离函数.

回顾一下完备的定义：若集合 X 中的每一个 Cauchy 序列均在 X 的范数 ρ 或距离 d 下是收敛序列，则称 X 为**完备的**. 其中 X 中的一列元素 $\{x_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ 称为一个 **Cauchy 序列**，如果对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，使得 $\forall k,l\geqslant N$ 有

$$\rho(x_k-x_l)\leqslant\varepsilon \quad 或 \quad d(x_k,x_l)\leqslant\varepsilon.$$

容易验证

定理3.3 对于任意固定的 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$，在上述的范数 $\rho_{\alpha,\beta}$ 或距离 $d_{\alpha,\beta}$ 下 $S(\mathbf{R}^n)$ 不可能是完备的.

我们给出平移不变和 Fréchet 空间的定义如下：

定义3.2 (i) X 上的一个距离 d 是**平移不变的**，如果

$$d(a+c,b+c)=d(a,b),\quad \forall a,b,c\in X.$$

(ii) 一个完备的距离空间 X，如果距离是平移不变的，则称之为 **Fréchet 空间**.

将 $\{d_{\alpha,\beta}\}$ 按某种顺序一一对应地排列成 $\{d_n\}$，然后令

$$d=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\frac{d_n}{1+d_n},$$

则 d 也是 $S(\mathbf{R}^n)$ 上的一个距离. 在此距离下的 $S(\mathbf{R}^n)$ 称为 **Schwartz 空间**.

$S(\mathbf{R}^n)$ 在 d 下为一个距离空间是比较明显的；实际上，我们还有

定理3.4 $S(\mathbf{R}^n)$ 是 Fréchet 空间.

证 (1) 若 $\{\varphi_k\}$ 对 d 是 Cauchy 列，则对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，使得 $\forall k,k'>N$，有

$$2^{-n}\frac{d_n(\varphi_k,\varphi_{k'})}{1+d_n(\varphi_k,\varphi_{k'})}\leqslant d(\varphi_k,\varphi_{k'})\leqslant\varepsilon.$$

因此固定 n，只要 $\varepsilon < 2^{-n-1}$ 就有 $d_n(\varphi_k, \varphi_{k'}) \leqslant 2^{n+1}\varepsilon$. 等价地说，$\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{N}^n$，$\{\varphi_k\}$ 关于 $\rho_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ 也是 Cauchy 列. 换句话说，存在 $\varphi_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ 使得 $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} \mathrm{D}^{\boldsymbol{\beta}} \varphi_k(\boldsymbol{x})$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上一致收敛到 $\varphi_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{x})$. 由于极限收敛的唯一性，我们知道

$$\varphi_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} \mathrm{D}^{\boldsymbol{\beta}} \varphi_{\mathbf{0},\mathbf{0}}(\boldsymbol{x}).$$

记 $\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi_{\mathbf{0},\mathbf{0}}(\boldsymbol{x})$，则存在 φ 使得 $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} \mathrm{D}^{\boldsymbol{\beta}} \varphi(\boldsymbol{x})$ 分别是 $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} \mathrm{D}^{\boldsymbol{\beta}} \varphi_k(\boldsymbol{x})$ 的极限；这就是说，$\rho_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(\varphi_k - \varphi) \to 0, \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$.

(2) 由 $\forall n$，$d_n(\varphi_k, \varphi) \to 0$ 推出 $d(\varphi_k, \varphi) \to 0$. 实际上是要证明 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists k_0$，使得当 $k \geqslant k_0$ 时，$d(\varphi_k, \varphi) \leqslant \varepsilon$.

事实上，选取 N 使得 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. 对于 $n \leqslant N$，存在 k_0 使得当 $k \geqslant k_0$ 时，$d_n(\varphi_k, \varphi) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. 于是，对于 $k \geqslant k_0$，我们有

$$d(\varphi_k, \varphi) \leqslant \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} \frac{d_n}{1+d_n} + \sum_{n>N} 2^{-n} \leqslant \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon.$$

(3) 综合上面(1)和(2)，得到任意的关于度量 d 的 Cauchy 序列均存在关于度量 d 的收敛序列. 因而得到完备性.

(4) 平移不变是显然的. 这是因为

$$\begin{aligned} d_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(\varphi+\omega, \psi+\omega) &= \rho_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}((\varphi+\omega)-(\psi+\omega)) = \rho_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(\varphi-\psi) \\ &= d_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(\varphi, \psi), \end{aligned}$$

于是，$d(\varphi+\omega, \psi+\omega) = d(\varphi, \psi)$. ∎

接下来，我们来看 $S(\mathbf{R}^n)$ 与第二章中研究的函数空间的关系，以及 $S(\mathbf{R}^n)$ 在 Fourier 变换下的性质.

定理3.5 (ⅰ) $S(\mathbf{R}^n)$ 连续地嵌入到 $L^p(1 \leqslant p < \infty)$ 与 C_0，且稠密.

(ⅱ) $F: f \mapsto Ff = \hat{f}$ 是 $S(\mathbf{R}^n)$ 到 $S(\mathbf{R}^n)$ 的拓扑同构.

证 (ⅰ) 根据前面卷积与光滑逼近的结果，固定 $S(\mathbf{R}^n)$ 中一个积分为1的函数 $\varphi(\boldsymbol{x})$，固定一个在单位球上为1、在两倍的单位球上为0的 $S(\mathbf{R}^n)$ 中的函数 $\tau(\boldsymbol{x})$. 记

$$\tau_s f(\boldsymbol{x}) = \tau(s\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x}), \quad \varphi_t(\boldsymbol{x}) = t^{-n} \varphi\left(\frac{\boldsymbol{x}}{t}\right).$$

对于任意的 $L^p(1 \leqslant p < \infty)$ 中的函数 $f(\boldsymbol{x})$，当 $s \to 0$ 时有 $\|\tau_s f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})\|_p \to 0$，当 $t \to 0$ 时有

$$\|(\tau_s f) * \varphi_t(\boldsymbol{x}) - \tau_s f(\boldsymbol{x})\|_p \to 0.$$

由于 $(\tau_s f) * \varphi_t(\boldsymbol{x}) \in S(\mathbf{R}^n)$，可知 $S(\mathbf{R}^n)$ 在 $L^p(1 \leqslant p < \infty)$ 中稠密. 同理，

我们知道$(\tau_s f) * \varphi_t(x) \in S(\mathbf{R}^n)$在$C_0$中收敛到$f$，于是得到$S(\mathbf{R}^n)$在$C_0$中稠密.

$S(\mathbf{R}^n)$连续地嵌入到C_0是明显的. 下面证明$S(\mathbf{R}^n)$连续地嵌入到L^p $(1 \leqslant p < \infty)$，也就是证明：存在常数C，对于一个$S(\mathbf{R}^n)$中的函数的L^p范数$\|\varphi\|_p$能被$\sum\limits_{|\alpha|+|\beta| \leqslant C} \rho_{\alpha,\beta}(\varphi)$所控制. 实际上，

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_p &\leqslant C\Big(\int_{|x|\leqslant 1} |\varphi|^p \mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}} + C\Big(\int_{|x|>1} |x|^{-2np}(|x|^{2n}|\varphi|)^p \mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant C(\|\varphi\|_\infty + \||x|^{2n}\varphi(x)\|_\infty),\end{aligned}$$

$\forall k \geqslant 1$，$\varepsilon = 2^{-k}$，存在$\varphi_k(x) \in S(\mathbf{R}^n)$使得

$$\|\varphi_k - \varphi\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad \||x|^{2n}(\varphi_k - \varphi)\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是，根据$\|\varphi_k - \varphi\|_p \leqslant C(\|\varphi_k - \varphi\|_\infty + \||x|^{2n}(\varphi_k - \varphi(x))\|_\infty)$就可由$d(\varphi_k, \varphi) \to 0$推出$\|\varphi_k - \varphi\|_p \to 0$，即$S(\mathbf{R}^n)$连续地嵌入到$L^p(1 \leqslant p < \infty)$.

（ⅱ） 注意到，$\forall \varphi \in S(\mathbf{R}^n)$，$\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{N}^n$，对于 Fourier 变换，有

$$\begin{aligned}\xi^\alpha \mathrm{D}^\beta(F(\varphi))(\xi) &= \xi^\alpha \mathrm{D}^\beta\Big(\int \varphi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x\Big) = \int(-\mathrm{i}x)^\beta \varphi(x)\xi^\alpha \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x \\ &= \int(-\mathrm{i}x)^\beta \varphi(x)(-\mathrm{i})^{-\alpha}\mathrm{D}_x^\alpha \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

运用分部积分，得到

$$\begin{aligned}\xi^\alpha \mathrm{D}^\beta(F(\varphi))(\xi) &= (\mathrm{i})^{-\alpha}\int \mathrm{D}_x^\alpha((-\mathrm{i}x)^\beta \varphi(x))\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x \\ &= \sum_{\gamma_1 \leqslant \beta,\ \gamma_2 \leqslant \alpha} C_{\gamma_1,\gamma_2}\int(x^{\gamma_1}\mathrm{D}^{\gamma_2}\varphi(x))\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由于

$$\|x^{\gamma_1}\mathrm{D}^{\gamma_2}\varphi(x)\|_{L^1} \leqslant C_{\gamma_1,\gamma_2}\sum_{|\alpha| \leqslant n+1+|\gamma_1|}\rho_{\alpha,\gamma_2}(\varphi),$$

得$\xi^\alpha \mathrm{D}^\beta(F(\varphi))(\xi) \in L^\infty$. 这就是说，$F(\varphi) \in S(\mathbf{R}^n)$且

$$\rho_{\alpha,\beta}(F(\varphi)) \leqslant C_{\alpha,\beta}\sum_{|\alpha'| \leqslant n+1+|\beta|,\ |\beta'| \leqslant |\alpha|}\rho_{\alpha',\beta'}(\varphi),$$

因此，$F: f \mapsto Ff = \hat{f}$是$S(\mathbf{R}^n)$到$S(\mathbf{R}^n)$的连续映射.

同理，F的逆变换F^{-1}具有同样的性质，F^{-1}是$S(\mathbf{R}^n)$到$S(\mathbf{R}^n)$的连续映射. 于是，根据 Fourier 逆变换定理有$F: f \mapsto Ff = \hat{f}$是$S(\mathbf{R}^n)$到$S(\mathbf{R}^n)$的拓扑同构. ■

下面是我们经常遇到的在实验函数上的运算，除了 Fourier 变换 ^ 或F：

$$F\psi(\xi) = \hat{\psi}(\xi) = \int \psi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x$$

另外还有如下几种运算，它们都是 $S(\mathbf{R}^n)$ 到 $S(\mathbf{R}^n)$ 的连续映射：

1° 平移运算 τ_h：$\tau_h\psi(\boldsymbol{x})=\psi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{h})$；

2° 反射运算 $\sim$：$\tilde{\psi}(\boldsymbol{x})=\psi(-\boldsymbol{x})$.

这里的(ⅰ)和(ⅱ)两个运算可以用更广泛的变元替换来统一给出. 实际上，对于从 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的可逆矩阵变换 T_A，$T_A\psi(\boldsymbol{x})=\psi(\boldsymbol{Ax})$.

3° 卷积运算 $*$：$u*\psi(\boldsymbol{x})=\int u(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\psi(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y}$，$\forall u(\boldsymbol{x})\in S(\mathbf{R}^n)$.

卷积运算在分析和其他领域有着重要的作用. 它具有

(1) 可交换性：$f*g=g*f$；

(2) 可结合性：$(f*g)*h=f*(g*h)$；

(3) 微分法：$\partial^k(f*g)=(\partial^k f)*g=f*(\partial^k g)$.

4° 微商运算 D^{α}. 一般函数的求导与顺序有关，但由于 $S(\mathbf{R}^n)$ 中的函数具光滑性，使得它中的函数的求导与顺序无关.

3.2 分布的定义

如果不知道下面弱 $*$ 拓扑的定义是怎么回事，大家就理解成定义 3.3 (ⅲ) 中解释性的话. 广义函数的定义如下：

定义3.3 (ⅰ) $S(\mathbf{R}^n)$ 上的所有连续线性泛函所构成的空间 $S'(\mathbf{R}^n)$ 称为**缓增广义函数空间**.

(ⅱ) 设 Φ 是某个数域，比如实数域或复数域. $S(\mathbf{R}^n)$ 上的线性泛函 T：$S(\mathbf{R}^n)\to\Phi$ **连续**是指对于 $S(\mathbf{R}^n)$ 中的任意收敛序列 $\varphi_k\to\varphi$ 有

$$T\varphi_k\to T\varphi.$$

(ⅲ) 在 $S'(\mathbf{R}^n)$ 上，我们可以赋予弱 $*$ 拓扑. 在 $S'(\mathbf{R}^n)$ 上赋予弱 $*$ 拓扑，就是说，$\{l_n\}\in S'(\mathbf{R}^n)$ 且**收敛于** $l\in S'(\mathbf{R}^n)$，如果

$$l_n(\varphi)\to l(\varphi),\quad \forall\varphi\in S(\mathbf{R}^n).$$

l 在 φ 上的作用有时也记为 $\langle l,\varphi\rangle$.

下面介绍几个广义函数的例子：

(1) 我们熟知的广义函数有定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的所有 Lebesgue 可积函数 $f\in L^p(1\leqslant p\leqslant\infty)$，它通过下面的积分可以确定一个广义函数：

$$\langle f,\varphi\rangle=\int f(\boldsymbol{x})\,\overline{\varphi(\boldsymbol{x})}\mathrm{d}\boldsymbol{x},\quad \forall\varphi\in S(\mathbf{R}^n).$$

首先，由定义 3.3，每一个 L^p 中的函数 f 定义一个线性泛函是显然的.

令$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$. 关于连续性，因为存在$N=n+1$使得$\forall\varphi\in S(\mathbf{R}^n)$有

$$|\langle f,\varphi\rangle|\leqslant\|f\|_{L^p}\|\varphi\|_{L^{p'}}\leqslant C\|f\|_{L^p}\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|+|\boldsymbol{\beta}|\leqslant N}\rho_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(\varphi).$$

于是

$$|\langle f,\varphi_k-\varphi\rangle|\leqslant C\|f\|_{L^p}\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|+|\boldsymbol{\beta}|\leqslant N}\rho_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(\varphi_k-\varphi).$$

(2) Dirac 函数δ通过下面的定义确定一个广义函数：

$$\langle\delta,\varphi\rangle=\varphi(0),\quad\forall\varphi\in S(\mathbf{R}^n).$$

首先，Dirac 函数δ定义一个线性泛函是显然的. 关于连续性，因为$\forall\varphi\in S(\mathbf{R}^n)$有$|\langle\delta,\varphi\rangle|\leqslant\rho_{\mathbf{0},\mathbf{0}}(\varphi)$.

(3) 每个常系数多项式$P(\boldsymbol{x})$ ($\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$)确定$S(\mathbf{R}^n)$上一个缓增分布. 每个连续函数$f(\boldsymbol{x})$在无穷远处缓增(即$\exists N>0$, 使得$|f(\boldsymbol{x})|\leqslant C_N(1+|\boldsymbol{x}|)^N$)，它也定义一个缓增分布.

(4) 连续一致有界的函数空间作为线性子空间连续地嵌入到$S'(\mathbf{R}^n)$中，在这个意义下广义函数可作为连续函数概念的推广.

广义函数的定义很抽象，它具体由一些什么元素构成呢？下面的定理给出了每一个广义函数是一个缓增分布，即无穷远处缓增的连续函数及其有限次微分后生成的函数.

定理3.6 $S(\mathbf{R}^n)$上的线性泛函l是连续的，当且仅当存在正实数C与正整数$k,m\in\mathbf{Z}_+$使得

$$|l(\varphi)|\leqslant C\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant k,\ |\boldsymbol{\beta}|\leqslant m}\rho_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(\varphi),\quad\forall\varphi\in S(\mathbf{R}^n).\tag{3.4}$$

证 由(3.4)导出连续性是显然的，我们只需证明由连续性导出$l(\varphi)$的估计式(3.4)即可. 由于l是连续线性泛函，因此对于$S(\mathbf{R}^n)$中的任意收敛序列$\varphi_k\to\varphi$有$l(\varphi_k)\to l(\varphi)$. 下面使用反证法.

令

$$B_m=\Big\{\varphi\in S(\mathbf{R}^n):\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|+|\boldsymbol{\beta}|\leqslant m}\rho_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(\varphi)\leqslant 1\Big\},$$

则$B_{m+1}\subset B_m$. 因此存在常数$C>0$，存在正整数m，使得

$$|l(\varphi)|\leqslant C,\quad\forall\varphi\in B_m.$$

否则$\forall$正整数N，$\forall m$，存在$\varphi_N^m\in B_m$使得$|l(\varphi_N^m)|\geqslant N$. 由此$\forall$正整数$N$，存在$\varphi_N\in B_m$，$\forall m$使得$|l(\varphi_N)|\geqslant N$. 由于$S(\mathbf{R}^n)$是Fréchet空间，选取$\{\varphi_N\}$的一个在$S(\mathbf{R}^n)$中的收敛子列$\varphi_{s'}$使得$\varphi_{s'}(\boldsymbol{x})$收敛于某个$\varphi\in S(\mathbf{R}^n)$，

这样就有 $\varphi \in S(\mathbf{R}^n)$ 和 $l(\varphi)=\infty$. 与 l 是连续线性泛函数矛盾.

令

$$\|\varphi\|=\sum_{|\alpha|+|\beta|\leqslant m}\rho_{\alpha,\beta}(\varphi),\quad \forall \varphi \in S(\mathbf{R}^n).$$

于是，$\forall 0\neq\varphi \in S(\mathbf{R}^n)$ 有 $\psi=\|\varphi\|^{-1}\varphi \in B_m$. 因此，$|l(\varphi)|\leqslant C\|\varphi\|$. ∎

下面介绍分布的几种运算：

1° 平移运算 τ_h：$\langle \tau_h u,\psi\rangle=\langle u,\tau_{-h}\psi\rangle$；

2° 反射运算 $\sim$：$\langle \tilde{u},\psi\rangle=\langle u,\tilde{\psi}\rangle$.

这两种运算可以包含在更广泛的变元变换中. 设 T：$\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 是可逆线性变换，$|\det T|$ 是变换 T 的Jacob矩阵的行列式. 上述(ⅰ)和(ⅱ)对应的行列式为 1. 一般的变元变换 T：$S'(\mathbf{R}^n)\to S'(\mathbf{R}^n)$ 由下列方式定义：

$$\langle Tf,\varphi\rangle=\langle f(T^{-1}y),\varphi(y)\rangle=|\det T|\langle f,\varphi(Ty)\rangle.$$

上述的可逆线性变换还可以推广到无穷可微的可逆变换.

3° 卷积运算 $*$：$\langle u*\varphi,\psi\rangle=\langle u,\tilde{\varphi}*\psi\rangle$，$\forall \varphi(x)\in S(\mathbf{R}^n)$.

卷积运算具有很多好性质. 比如，对于平移算子 τ_a 有

$$\tau_a(f*g)=(\tau_a f)*g=f*\tau_a g.$$

还比如广义函数的支集性质. 广义函数 $\varphi(x)$ 的支集 $\operatorname{supp}\varphi(x)$ 是这样定义的：

$$x\notin \operatorname{supp}\varphi(x)\Leftrightarrow \text{存在 } x \text{ 的邻域 } V_x \text{ 使得 } \forall f(x)\in C_0^{\infty}(V_x) \text{ 有 } \langle\varphi(x),f(x)\rangle=0.$$

对于广义函数 $\varphi(x)$ 的支集 $\operatorname{supp}\varphi(x)$ 有如下性质：

命题3.1 *如果卷积 $f*g$ 存在，比如其中至少有一个属于 $S(\mathbf{R}^n)$，则有*

$$\operatorname{supp}(f*g)\subset\overline{\operatorname{supp}f\oplus\operatorname{supp}g}.$$

证 (1) 假设 $f\in S(\mathbf{R}^n)$，$g\in S(\mathbf{R}^n)$，假定 $x_0\in\operatorname{supp}(f*g)$. 因为

$$\operatorname{supp}f(x_0-y)=x_0-\operatorname{supp}f,$$

$$\operatorname{supp}f(x_0-y)g(y)\subset\operatorname{supp}f(x_0-y)\cap\operatorname{supp}g(y),$$

所以

$$(f*g)(x_0)=\int_{\operatorname{supp}f(x_0-y)\cap\operatorname{supp}g(y)}f(x_0-y)g(y)\mathrm{d}y.$$

如果 $x_0\notin\operatorname{supp}f\oplus\operatorname{supp}g$，那么 $\operatorname{supp}f(x_0-y)\cap\operatorname{supp}g(y)=\varnothing$；从而 $f*g(x_0)=0$，因此 $\operatorname{supp}(f*g)\subset\overline{\operatorname{supp}f\oplus\operatorname{supp}g}$.

(2) 假设 $f\in S(\mathbf{R}^n)$，$g\in S'(\mathbf{R}^n)$，如果 $x_0\notin\overline{\operatorname{supp}f\oplus\operatorname{supp}g}$，那么存在 x_0 的邻域 V_{x_0} 使得

$$(V_{x_0} - \operatorname{supp} f(\mathbf{y})) \cap \operatorname{supp} g(\mathbf{y}) = \varnothing. \tag{3.5}$$

另外，$\forall h \in C_0^\infty(V_{x_0})$，有

$$\langle f * g, h\rangle = \langle g * f, h\rangle = \langle g, \tilde{f} * h\rangle,$$

因此 $\operatorname{supp} \tilde{f} * h \subset V_{x_0} - \operatorname{supp} f$. 由(3.5)知$\langle f * g, h\rangle = 0$. 这就是说，$x_0 \notin \operatorname{supp} f * g$. ∎

4° 微商运算 D^α 是如下定义的：

$$\langle \mathrm{D}^\alpha u, \psi\rangle = (-1)^\alpha \langle u, \mathrm{D}^\alpha \psi\rangle.$$

它具有如下不同于通常微分的性质：

命题3.2　（ⅰ）每个广义函数均是无限可微的.

（ⅱ）广义函数的偏导数与求导的顺序无关.

证　（ⅰ）每个广义函数均是无限可微的是因为实验函数是无限可微的. 实际上，$\forall u \in S'(\mathbf{R}^n)$，$\forall \varphi \in S(\mathbf{R}^n)$，有

$$\langle \mathrm{D}^\alpha u, \varphi\rangle = (-1)^\alpha \langle u, \mathrm{D}^\alpha \varphi\rangle.$$

由于 $\mathrm{D}^\alpha \varphi \in S(\mathbf{R}^n)$，可知 $\mathrm{D}^\alpha u$ 仍然为 $S'(\mathbf{R}^n)$ 中的一个元素.

（ⅱ）广义偏导数与求导的顺序无关是因为实验函数偏导数与求导的顺序无关. ∎

下面我们计算几个典型的分布：

命题3.3　（ⅰ）令

$$\ln x_+ = \begin{cases} 0, & \text{如果 } x < 0, \\ \ln x, & \text{如果 } x > 0, \end{cases} \qquad \theta(x) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } x < 0; \\ 1, & \text{如果 } x > 0, \end{cases}$$

那么 $\forall \varphi(x) \in S(\mathbf{R})$ 有

$$((\ln x_+)', \varphi) = \int_0^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(0)\theta(1-x)}{x} \mathrm{d}x.$$

（ⅱ）对于赫维赛德函数

$$H(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x_1 \geqslant 0, \cdots, x_n \geqslant 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

它的偏导数$\dfrac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} H$ 为 δ 函数 $\delta(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

（ⅲ）令 $r = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$，令 Ω_n 表示 n 维空间中单位球面的面积. 当 $n \geqslant 3$ 时，对于 Laplace 算子 $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ 有

$$\Delta\frac{1}{r^{n-2}}=-(n-2)\Omega_n\delta(\boldsymbol{x}).$$

证 （ⅰ） $\forall\varphi(x)\in S(\mathbf{R})$ 有

$$((\ln x_+)',\varphi)=-(\ln x_+,\varphi')=-\int_0^\infty \ln x\,\varphi'(x)\mathrm{d}x$$
$$=-\lim_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^\infty \ln x\,\varphi'(x)\mathrm{d}x.$$

运用分部积分法，

$$\int_\varepsilon^\infty \ln x\,\varphi'(x)\mathrm{d}x=-\varphi(\varepsilon)\ln\varepsilon-\int_\varepsilon^\infty\frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x.$$

又因为

$$-\varphi(0)\ln\varepsilon=\int_\varepsilon^1\frac{\varphi(0)}{x}\mathrm{d}x=\int_\varepsilon^\infty\frac{\varphi(0)\theta(1-x)}{x}\mathrm{d}x,$$

于是，

$$((\ln x_+)',\varphi)=\lim_{\varepsilon\to0}\left[(\varphi(0)-\varphi(\varepsilon))\ln\varepsilon+\int_\varepsilon^\infty\frac{\varphi(x)-\varphi(0)\theta(1-x)}{x}\mathrm{d}x\right]$$
$$=\int_0^\infty\frac{\varphi(x)-\varphi(0)\theta(1-x)}{x}\mathrm{d}x.$$

（ⅱ） 对于赫维赛德函数类似上面的方法可得到. 实际上，利用分部积分法，有

$$\left(\frac{\partial^n}{\partial x_1\cdots\partial x_n}H,\varphi(\boldsymbol{x})\right)=(-1)^n\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty\frac{\partial^n}{\partial x_1\cdots\partial x_n}\varphi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$
$$=(-1)^n\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\left(\int_0^\infty\frac{\partial^n}{\partial x_1\cdots\partial x_n}\varphi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1\right)$$
$$=\cdots$$
$$=\varphi(0).$$

（ⅲ） 根据分布定义有

$$\left(\Delta\frac{1}{r^{n-2}},\varphi\right)=\left(\frac{1}{r^{n-2}},\Delta\varphi\right)=\int\frac{\Delta\varphi}{r^{n-2}}\mathrm{d}v=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{r\geqslant\varepsilon}\frac{\Delta\varphi}{r}\mathrm{d}v.$$

用 $\mathrm{d}s$ 表示球面 $r=\varepsilon$ 的面积单元，对最后一个积分利用 Green 公式有

$$\int_{r\geqslant\varepsilon}\frac{\Delta\varphi}{r^{n-2}}\mathrm{d}v=\int_{r\geqslant\varepsilon}\varphi\Delta\frac{1}{r^{n-2}}\,\mathrm{d}v-\int_{r=\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{1}{r^{n-2}}\mathrm{d}s+\int_{r=\varepsilon}\varphi\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r^{n-2}}\mathrm{d}s.$$

由于当 $r\neq0$ 时$\frac{1}{r^{n-2}}$ 为调和函数，有$\int_{r\geqslant\varepsilon}\varphi\Delta r^{2-n}\,\mathrm{d}v=0$，以及当 $r=\varepsilon$ 时

$$\frac{1}{r^{n-2}}=\varepsilon^{2-n},\quad \frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r^{n-2}}=-(n-2)\varepsilon^{1-n},$$

这样当 $\varepsilon\to 0$ 时有

$$-\int_{r=\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{1}{r^{n-2}}\mathrm{d}s\sim-\varepsilon\Omega_n\frac{\partial\varphi}{\partial r}(0),$$

$$\int_{r=\varepsilon}\varphi\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r^{n-2}}\mathrm{d}s\sim-(n-2)\Omega_n\varphi(0),$$

于是就有 $\Delta\frac{1}{r^{n-2}}=-4\pi\delta(x)$.

5° 分布也可以定义 Fourier 变换 ^ 或 F:

$$\langle\hat{u},\psi\rangle=\langle u,\hat{\psi}\rangle. \tag{3.6}$$

这样定义的 Fourier 变换有如下性质:

命题3.4 (ⅰ) 对于 L^1 函数,由(3.6)定义的 Fourier 变换与第二章定义的 Fourier 变换是一致的.

(ⅱ) 1 的 Fourier 变换为 δ 函数.

证 (ⅰ) $\forall f\in L^1$,$\psi\in S(\mathbf{R}^n)$,根据分布的 Fourier 变换定义,有

$$\langle\hat{f},\psi\rangle=\langle f,\hat{\psi}\rangle=\iint f(y)\psi(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\xi}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\xi.$$

交换积分顺序,有

$$\langle\hat{f},\psi\rangle=\langle\int f(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\xi}\,\mathrm{d}y,\psi(\xi)\rangle.$$

于是,根据分布的定义就得到(ⅰ)的结论.

(ⅱ) 在分布意义下,当 $t\to 0$ 时,Gauss 函数 $\mathrm{e}^{-t|\xi|^2}$ 收敛到函数 1. 此 Gauss 函数的 Fourier 变换为 Gauss 函数 $(\pi t^{-1})^{\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{|\xi|^2}{4t}}$;当 $t\to 0$ 时,它在分布意义下收敛为 δ 函数.

我们不要觉得分布难以捉摸,其实分布的 Fourier 变换仍然是分布:

命题3.5 $FS'(\mathbf{R}^n)=S'(\mathbf{R}^n)$.

证 根据定义,$\forall u\in S'(\mathbf{R}^n)$,$\forall\psi\in S(\mathbf{R}^n)$,有

$$\langle\hat{u},\psi\rangle=\langle u,\hat{\psi}\rangle.$$

由于 $FS(\mathbf{R}^n)\subset S(\mathbf{R}^n)$,可知 $\hat{u}$ 确实定义 $S'(\mathbf{R}^n)$ 的一个元素.

对于任意的分布 $u\in S'(\mathbf{R}^n)$,令 $w=F\left(\frac{\tilde{u}}{(2\pi)^n}\right)$,自然有 $w\in S'(\mathbf{R}^n)$. 下面证明 u 必定表示为 w 的 Fourier 变换. 实际上,

$$\langle Fw,\psi\rangle=\langle w,F\psi\rangle=\langle F\left(\frac{\tilde{u}}{(2\pi)^n}\right),F\psi\rangle=\langle\frac{\tilde{u}}{(2\pi)^n},F(F\psi)\rangle$$

$$=\langle \tilde{u}, \frac{1}{(2\pi)^n} F(F\psi)\rangle = \langle u, \frac{1}{(2\pi)^n} \widetilde{F(F\psi)}\rangle$$
$$=\langle u, F^{-1}(F\psi)\rangle.$$

根据 Fourier 变换的逆公式有 $F^{-1}(F\psi)=\psi$，因此，$u=Fw$. ∎

3.3 分布的单位逼近与 Littlewood-Paley 分解

$S'(\mathbf{R}^n)$ 中的分布在一点可以没有意义，但是可以利用光滑函数逼近来处理. 我们知道存在实值函数 $\varphi \in S(\mathbf{R}^n)$ 满足$\int \varphi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=1$；$\forall t>0$，令

$$\varphi_t(\boldsymbol{x})=t^{-n}\varphi\left(\frac{\boldsymbol{x}}{t}\right).$$

根据前面的知识，对于一个具有紧支集的 L^1 中的函数 u，我们知道 $u_t(\boldsymbol{x})=u*\varphi_t(\boldsymbol{x})$ 是在任意的 $\boldsymbol{x}\in \mathbf{R}^n$ 有定义且点点无穷可微的函数. 对于分布，我们有

定理3.7 *对于 $S'(\mathbf{R}^n)$ 中的任意分布 u，存在一列点点无穷可微的函数 $u_t(\boldsymbol{x})$，在分布意义下当 $t\to 0$ 时 $u_t(\boldsymbol{x})$ 收敛到分布 u.*

证 下面证明在分布意义下 $u_t(\boldsymbol{x})=u*\varphi_t(\boldsymbol{x})$ 收敛到分布 u，也即证明：$\forall \psi\in S(\mathbf{R}^n)$，当 $t\to 0$ 时，有$(u*\varphi_t,\psi)\to(u,\psi)$.

令 $\tilde{\varphi}(\boldsymbol{x})=\varphi(-\boldsymbol{x})$，对于任意固定的 $\psi\in S(\mathbf{R}^n)$，对于任意固定的 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in \mathbf{N}^n$，我们有

$$\|\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}\mathrm{D}^{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\varphi}_t*\psi(\boldsymbol{x})\|_\infty+\|\psi(\boldsymbol{x})\|_\infty<C_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\psi}, \tag{3.7}$$

$$\tilde{\varphi}_t*\mathrm{D}^{\boldsymbol{\beta}}\psi(\boldsymbol{x})\text{ 一致收敛到 }\mathrm{D}^{\boldsymbol{\beta}}\psi(\boldsymbol{x}). \tag{3.8}$$

另外，我们有$(u*\varphi_t,\psi)-(u,\psi)=(u,\tilde{\varphi}_t*\psi-\psi)$. 根据前面证明的分布的缓增性质，存在 $k,m>0$，$\forall\psi\in S(\mathbf{R}^n)$ 使得

$$|(u,\psi)|\leqslant C\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|<k,\ |\boldsymbol{\beta}|<m}\|\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}\mathrm{D}^{\boldsymbol{\beta}}\psi\|_\infty;$$

因此有

$$(u,\tilde{\varphi}_t*\psi-\psi)\leqslant C\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|<k,\ |\boldsymbol{\beta}|<m}\|\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}\mathrm{D}^{\boldsymbol{\beta}}(\tilde{\varphi}_t*\psi-\psi)\|_\infty.$$

根据(3.7) 和(3.8)，得到我们所要求的结论. ∎

前面的分布也称为**非齐次分布**，不考虑 $t\to\infty$ 的情形. 有时我们还需考虑齐次分布，这时需要考虑 $t\to\infty$ 的情形. **齐次分布空间** $S'(\mathbf{R}^n)/P(\mathbf{R}^n)$ 是

指广义函数模去多项式，即在

$$S_0(\mathbf{R}^n)=\left\{f\in S(\mathbf{R}^n):\int \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=0,\ \forall\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{N}^n\right\}$$
$$=\{f\in S(\mathbf{R}^n):\mathrm{D}^{\boldsymbol{\alpha}}\hat{f}(\mathbf{0})=0,\ \forall\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{N}^n\}$$

上的分布. 对于 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，定义 $I_0^{(i)}\psi(\boldsymbol{x})=\psi(\boldsymbol{x})$；$\forall t\geqslant 1$，定义

$$I_t^{(i)}\psi=\int_{-\infty}^{x_i}I_{t-1}^{(i)}\psi(x_1,\cdots,x_{i-1},y,x_{i+1},\cdots,x_n)\mathrm{d}y.$$

对于 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in\mathbf{N}^n$，定义

$$I_{\boldsymbol{\alpha}}\psi=\prod_{i=1}^{n}I_{\alpha_i}^{(i)}\psi.$$

通过分部积分可知，如果 $\psi\in S_0(\mathbf{R}^n)$，那么 $I_{\boldsymbol{\alpha}}\psi\in S_0(\mathbf{R}^n)$. 下面证明

命题3.6　*在齐次分布意义下，当 $t\to\infty$ 时，$u_t(\boldsymbol{x})=u*\varphi_t\to 0$.*

证　根据定义，

$$\langle u*\varphi_t,\psi\rangle=\langle u,t^{-n}\int\varphi\left(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{t}\right)\psi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\rangle.$$

再利用 $\psi(\boldsymbol{x})$ 的消失矩性质，对于任意 $\boldsymbol{\alpha}$ 有

$$I_t(\varphi,\psi)=t^{-n}\int\varphi\left(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{t}\right)\psi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$
$$=(-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|}t^{-n-|\boldsymbol{\alpha}|}\int(\mathrm{D}^{\boldsymbol{\alpha}}\varphi)\left(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{t}\right)(I_{\boldsymbol{\alpha}}\psi)(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

其中$(\mathrm{D}^{\boldsymbol{\alpha}}\varphi)(\boldsymbol{x})\in S(\mathbf{R}^n)$，$(I_{\boldsymbol{\alpha}}\psi)(\boldsymbol{x})\in S_0(\mathbf{R}^n)$. 然后利用$u$若为分布则必为缓增分布，有

$$|\langle u,I_t(\varphi,\psi)\rangle|\leqslant C\sum_{|\boldsymbol{\beta}|+|\boldsymbol{\gamma}|\leqslant N}\|\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{\beta}}\mathrm{D}^{\boldsymbol{\gamma}}I_t(\varphi,\psi)\|_\infty. \tag{3.9}$$

并且有

$$\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{\beta}}\mathrm{D}^{\boldsymbol{\alpha}}I_t(\varphi,\psi)=(-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|+|\boldsymbol{\beta}|}\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{\beta}}\int(\mathrm{D}^{\boldsymbol{\alpha}}\varphi)\left(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{t}\right)(\mathrm{D}^{\boldsymbol{\gamma}}I_{\boldsymbol{\alpha}}\psi)(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

如果$|\boldsymbol{y}|\leqslant 4t$，那么

$$\|\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{\alpha}}\mathrm{D}^{\boldsymbol{\gamma}}I_t(\varphi,\psi)\|_\infty\leqslant Ct^{-n-|\boldsymbol{\alpha}|+|\boldsymbol{\beta}|}\int|(\mathrm{D}^{\boldsymbol{\gamma}}I_{\boldsymbol{\alpha}})\psi(\boldsymbol{x})|\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$
$$\leqslant Ct^{-n-|\boldsymbol{\alpha}|+|\boldsymbol{\beta}|}.$$

如果$|\boldsymbol{y}|>4t$ 且$|\boldsymbol{x}|\leqslant\frac{|\boldsymbol{y}|}{2}$，则有

$$|\boldsymbol{y}|^{\boldsymbol{\beta}}\left(1+\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}{t}\right)^{-\boldsymbol{\beta}}\leqslant C|\boldsymbol{y}|^{\boldsymbol{\beta}}\left(\frac{|\boldsymbol{y}|}{t}\right)^{-\boldsymbol{\beta}}\leqslant Ct^{|\boldsymbol{\beta}|}.$$

于是，

$$|y^{\beta}D^{\alpha}I_t(\varphi,\psi)|\leqslant Ct^{-n-|\alpha|}\int_{|x|\leqslant\frac{|y|}{2}}|y|^{\beta}\left(1+\frac{|x-y|}{t}\right)^{-\beta}(1+|x|)^{-n-1}dx$$

$$+t^{-n-|\alpha|+|\beta|}|y|^{\beta}\int_{|x|\geqslant\frac{|y|}{2}}(1+|x|)^{-n-|\beta|}dx$$

$$\leqslant Ct^{-n-|\alpha|+|\beta|}.$$

因而取 $|\alpha|>N$ 知(3.9)右边趋于0.

BMO空间在微分方程和调和分析中是十分著名的齐次分布空间，它的预备对偶空间就是著名的Hardy空间.

下面我们考虑齐次分布(非齐次分布在下面的讨论中令 N 不趋于无穷大可得). 对于一个分布 u，$u_{2^k t}(x)-u_{2^{k+1}t}(x)$ 点点有意义. 根据定理3.7和命题3.6，当 $N,M\to+\infty$ 时，在分布意义下有

$$\sum_{-N\leqslant k\leqslant M}(u_{2^k t}(x)-u_{2^{k+1}t}(x))=u_{2^{-N}t}(x)-u_{2^{M+1}t}(x)\to u.$$

这也就是说，$u=\sum_{j\in\mathbf{Z}}u_j$. 实际上，Triebel正是利用这样一种方法将大多数空间分类成Besov空间和Lizorkin-Triebel空间.

Littlewood-Paley分解来源于 L^p 函数的Fourier变换的二进组合；L^p 函数的Fourier变换不进行组合时不依范数收敛，但对其Fourier变换在二进环上研究是可以的.

在单位逼近中，选取 $\varphi(x)$ 使得 $\operatorname{supp}\hat{\varphi}\subset\{\xi\in\mathbf{R}^n:|\xi|\leqslant1\}$，以及在 $\left\{\xi\in\mathbf{R}^n:|\xi|\leqslant\frac{1}{2}\right\}$ 上为 $\hat{\varphi}(\xi)=1$. 定义

$$\varphi_v(x)=2^{n(v+1)}\varphi(2^{v+1}x)-2^{nv}\varphi(2^v x),$$

于是，就有了定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的函数族 $\{\varphi_v(x)\}_{v\in\mathbf{Z}}$ 满足

$$\varphi_v\in S(\mathbf{R}^n),\tag{3.10}$$

$$\operatorname{supp}\hat{\varphi_v}\subset\left\{\xi\in\mathbf{R}^n:\frac{1}{2}\leqslant2^{-v}|\xi|\leqslant2\right\},\tag{3.11}$$

$$|\hat{\varphi_v}(\xi)|\geqslant C>0,\quad 当\frac{3}{5}\leqslant2^{-v}|\xi|\leqslant\frac{5}{3},\tag{3.12}$$

$$|\partial^a\hat{\varphi_v}(\xi)|\leqslant C_a2^{-v|a|},\quad 当|a|\geqslant0,\tag{3.13}$$

$$\sum_{v=-\infty}^{\infty}\hat{\varphi_v}(\xi)=1.\tag{3.14}$$

实际上在研究函数空间时，上面的5个条件不一定要同时满足. 这里不打算详细去研究函数空间，仅仅证明用上述函数族定义的齐次Besov空间和齐次Triebel-Lizorkin空间不依赖于函数族的选择. Lebesgue空间 L^p 是特殊

的 Sobolev 空间，在 $p\neq 2$ 时不是 Besov 空间，但是 Hölder 空间、Bloch 空间、Zygmund 空间均为 Besov 空间.

定义3.4 称 $f\in S'(\mathbf{R}^n)/P(\mathbf{R}^n)$ 属于 **Besov 空间** $\dot{B}_p^{a,q}(-\infty<a<\infty,\ 0<p,q\leqslant\infty)$，如果我们有

$$\|f\|_{\dot{B}_p^{a,q}}=\left[\sum_{v\in\mathbf{Z}}(2^{va}\|\varphi_v*f\|_p)^q\right]^{\frac{1}{q}}<\infty.$$

在未证明上述定义的空间不依赖于函数族的选择前，不妨将函数族$\{\varphi_v\}$定义的 $S'(\mathbf{R}^n)/P(\mathbf{R}^n)$ 中元素 f 的 Besov 范数记为$\|f\|_{\dot{B}_{p,\varphi}^{a,q}}$，相应的 Besov 空间记为 $\dot{B}_{p,\varphi}^{a,q}$. Peetre 曾经证明了 $\dot{B}_p^{a,q}$ 与函数族$\{\varphi_v\}$ 的选择无关. 与函数族$\{\varphi_v\}$ 的选择无关即相当于：

定理3.8 对满足(3.10) ~ (3.14) 条件的两组不同函数族$\{\varphi_v\}$ 和$\{\psi_v\}$，有

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,\varphi}^{a,q}}\sim\|f\|_{\dot{B}_{p,\psi}^{a,q}}.$$

证 证明的关键想法是利用两组函数的 Fourier 变换支集均在环形上，于是，利用 Fourier 变换在无限和与有限和之间转换.

由相似性，只须证明存在只依赖于(3.10) ~ (3.14) 中的常数 $C>0$，使得

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,\varphi}^{a,q}}\leqslant C\|f\|_{\dot{B}_{p,\psi}^{a,q}},\quad \forall f\in\dot{B}_{p,\psi}^{a,q}.$$

但根据定义有

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,\varphi}^{a,q}}=\left[\sum_{v\in\mathbf{Z}}(2^{va}\|\varphi_v*f\|_p)^q\right]^{\frac{1}{q}}.$$

注意到性质(3.14)，有 $\sum\limits_{v'\in\mathbf{Z}}\psi_{v'}*f=f$. 因此当 $0<q<\infty$ 时有(当 $q=\infty$ 时作相应改变)

$$\begin{aligned}\|f\|_{\dot{B}_{p,\varphi}^{a,q}}&=\left[\sum_{v\in\mathbf{Z}}\left(2^{va}\left\|\varphi_v*\left(\sum_{v'\in\mathbf{Z}}\psi_{v'}*f\right)\right\|_p\right)^q\right]^{\frac{1}{q}}\\&=\left[\sum_{v\in\mathbf{Z}}\left(2^{va}\left\|\sum_{v'\in\mathbf{Z}}\varphi_v*\psi_{v'}*f\right\|_p\right)^q\right]^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

根据性质(3.11) φ_v 和$\psi_{v'}$ 的 Fourier 变换的支集性质，仅当$|v-v'|\leqslant 2$ 时才有 $\varphi_v*\psi_{v'}*f$ 不为 0. 因此有

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,\varphi}^{a,q}}=\left[\sum_{v\in\mathbf{Z}}\left(2^{va}\left\|\sum_{|v-v'|\leqslant 2}\varphi_v*\psi_{v'}*f\right\|_p\right)^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant C\Big[\sum_{v\in\mathbf{Z}}\Big(2^{va}\sum_{|v-v'|\leqslant 2}\|\varphi_v*\psi_{v'}*f\|_p\Big)^q\Big]^{\frac{1}{q}}\\
&\leqslant C\Big[\sum_{v\in\mathbf{Z}}\Big(2^{va}\sum_{|v-v'|\leqslant 2}\|\psi_{v'}*f\|_p\Big)^q\Big]^{\frac{1}{q}}\\
&\leqslant C\Big[\sum_{v\in\mathbf{Z}}\sum_{|v-v'|\leqslant 2}\Big(2^{va}\|\psi_{v'}*f\|_p\Big)^q\Big]^{\frac{1}{q}}\\
&\leqslant C\Big[\sum_{v'\in\mathbf{Z}}\Big(2^{va}\|\psi_{v'}*f\|_p\Big)^q\Big]^{\frac{1}{q}}\\
&\leqslant C\|f\|_{\dot{B}^{a,q}_{p,\psi}}.
\end{aligned}
$$
∎

Triebel 改变了 Besov 空间积分和的求和顺序，将序列的 $l^q(L^p)$ 范数变成 $L^p(l^q)$ 范数，在 20 世纪 70 年代系统地研究了 Triebel-Lizorkin 空间. Triebel- Lizorkin 空间包括 Sobolev 空间和 Bessel 势空间等.

定义3.5 称 $f\in S'(\mathbf{R}^n)/P(\mathbf{R}^n)$ 属于 **Triebel-Lizorkin 空间** $\dot{F}^{a,q}_p(-\infty<a<\infty,\ 0<p<\infty,\ 0<q\leqslant\infty)$，如果

$$
\|f\|_{\dot{F}^{a,q}_p}=\Big\|\Big(\sum_{v\in\mathbf{Z}}2^{vaq}|\varphi_v*f|^q\Big)^{\frac{1}{q}}\Big\|_p<\infty.
$$

Triebel 曾经证明了 $\dot{F}^{a,q}_p$ 与函数族 $\{\varphi_v\}$ 的选择无关. 在未证明上述定义与函数族的选择无关之前，不妨将函数族 $\{\varphi_v\}$ 定义的 $S'(\mathbf{R}^n)/P(\mathbf{R}^n)$ 中元素 f 的 Triebel-Lizorkin 空间范数记为 $\|f\|_{\dot{F}^{a,q}_{p,\varphi}}$，相应的 Triebel-Lizorkin 空间记为 $\dot{F}^{a,q}_{p,\varphi}$. 与函数族 $\{\varphi_v\}$ 的选择无关即相当于：

定理3.9 对于满足(3.10) ~ (3.14) 条件的两组不同函数族 $\{\varphi_v\}$ 和 $\{\psi_v\}$，有

$$
\|f\|_{\dot{F}^{a,q}_{p,\varphi}}\sim\|f\|_{\dot{F}^{a,q}_{p,\psi}}.
$$

证 证明的关键想法是利用两组函数的 Fourier 变换支集均在环形上，这样利用 Fourier 变换在无限和和有限和之间转换.

由相似性，只须证明存在只依赖于(3.10) ~ (3.14) 中的常数 $C>0$，使得

$$
\|f\|_{\dot{F}^{a,q}_{p,\varphi}}\leqslant C\|f\|_{\dot{F}^{a,q}_{p,\psi}},\quad \forall f\in\dot{F}^{a,q}_{p,\psi}.
$$

但根据定义有

$$
\|f\|_{\dot{F}^{a,q}_{p,\varphi}}=\Big\|\Big(\sum_{v\in\mathbf{Z}}2^{vaq}|\varphi_v*f|^q\Big)^{\frac{1}{q}}\Big\|_p.
$$

注意到性质(3.14)，有$\sum\limits_{v'\in\mathbf{Z}}\psi_{v'}*f=f$. 因此，当$0<q<\infty$时有(当$q=\infty$时作相应改变)

$$\|f\|_{\dot{F}^{a,q}_{p,\varphi}}=\left\|\left(\sum_{v\in\mathbf{Z}}2^{vaq}\left|\varphi_v*\left(\sum_{v'\in\mathbf{Z}}\psi_{v'}*f\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\|_p$$

$$=\left\|\left(\sum_{v\in\mathbf{Z}}2^{vaq}\left|\sum_{v'\in\mathbf{Z}}\varphi_v*\psi_{v'}*f\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\|_p.$$

根据性质(3.11) φ_v和$\psi_{v'}$的Fourier变换的支集性质，仅当$|v-v'|\leqslant2$时才有$\varphi_v*\psi_{v'}*f$不为0. 因此有

$$\begin{aligned}\|f\|_{\dot{F}^{a,q}_{p,\varphi}}&=\left\|\left(\sum_{v\in\mathbf{Z}}2^{vaq}\left|\sum_{|v-v'|\leqslant2}\varphi_v*\psi_{v'}*f\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\|_p\\&\leqslant C\left\|\left(\sum_{v\in\mathbf{Z}}2^{vaq}\sum_{|v-v'|\leqslant2}|\varphi_v*\psi_{v'}*f|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\|_p\\&\leqslant C\left\|\left(\sum_{v\in\mathbf{Z}}2^{vaq}\sum_{|v-v'|\leqslant2}|\psi_{v'}*f|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\|_p\\&\leqslant C\left\|\left(\sum_{v\in\mathbf{Z}}\sum_{|v-v'|\leqslant2}2^{vaq}|\psi_{v'}*f|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\|_p\\&\leqslant C\left\|\left(\sum_{v'\in\mathbf{Z}}2^{vaq}|\psi_{v'}*f|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\|_p\\&\leqslant C\|f\|_{\dot{F}^{a,q}_{p,\psi}}.\end{aligned}$$

∎

习　题

1. 对于分布$f(\boldsymbol{x})\in S'(\mathbf{R}^n)$，同样存在$f_{s,t}\in S(\mathbf{R}^n)$使得当$s,t\to0$时，在分布意义下$f_{s,t}\to f$.

提示：实际上，令$\varphi(\boldsymbol{x})$为在单位球上取值为1、两倍的单位球外为0的$S(\mathbf{R}^n)$中函数，$\psi(\boldsymbol{x})$为支集在单位球上积分为1的$S(\mathbf{R}^n)$中函数；令

$$\varphi_s(\boldsymbol{x})=\varphi(s\boldsymbol{x}),\quad \psi_t(\boldsymbol{x})=t^{-n}\psi(t^{-1}\boldsymbol{x}).$$

于是，取$f_{s,t}=(\varphi_s f)*\psi_t(\boldsymbol{x})$，$\operatorname{supp}f_{s,t}\subset B(0,2s^{-1}+t)$且$f_{s,t}\in S(\mathbf{R}^n)$. 利用

$$|\langle f,u\rangle|\leqslant I_{k,m}(u)=C\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant k,\ |\boldsymbol{\beta}|\leqslant m}\|\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}\mathrm{D}^{\boldsymbol{\beta}}u\|,\quad \forall u\in S(\mathbf{R}^n),$$

证明：

(1) $\varphi_s f\to f$.（实际上，$\langle\varphi_s f-f,u\rangle=\langle f,(\varphi_s-1)u\rangle$；由于当$s\to0$时，$\|\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}\mathrm{D}^{\boldsymbol{\beta}}(\varphi_s-1)u\|_\infty$收敛到0，即得所需结论.）

(2) $f_{s,t}\to\varphi_s f$. (实际上，$\langle f_{s,t}-\varphi_s f,u\rangle=\langle\varphi_s f,u*\tilde{\varphi}_t-u\rangle$；由于当 $t\to0$ 时，$\|x^\alpha D^\beta(u*\tilde{\varphi}_t-u)\|_\infty$ 收敛到 0，即得所需结论.)

2. 令 $\pi<a<\frac{4\pi}{3}$，$h(y)$ 是支集在$[\pi-a,a-\pi]$上的函数，在支集上

$$h(y)=b\mathrm{e}^{-((a-\pi)^2-y^2)^{-1}},\quad \int_{-\infty}^{+\infty}h(y)\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}.$$

令 $\theta(t)=\int_{-\infty}^{t}h(y)\mathrm{d}y$，$\varphi(x)=\sin\theta\left(x+\frac{\pi+a}{2}\right)\cos\theta\left(x-\frac{\pi+a}{2}\right)$，以及

$$\psi(x)=\varphi\left(\frac{x}{2}\right)-\varphi(x).$$

证明：$0\leqslant\psi(x)\leqslant1$，$\psi(x)\in S(\mathbf{R})$，以及 $\forall x\neq0$ 有$\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}\psi(2^{-k}x)=1$.

3. 如果对于任意的 $\varphi\in S(\mathbf{R}^n)$ 有 $u(\varphi)=\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}^n}\varphi(k)$，证明：$u\in S'(\mathbf{R}^n)$.

4. 给出一个满足如下条件的分布 $u\in S'(\mathbf{R})$：

$$u(\varphi)=\int\frac{\varphi(t)}{t}\mathrm{d}t,\ \varphi\in S(\mathbf{R}),\quad 且\ \varphi(0)=0.$$

进一步发展

近几十年插值空间、Q 空间、Morrey 空间、乘子空间等被广泛研究. 更为广泛的函数空间参见[38],[49] 和[80]，特别是[49] 在本章的两组具有三个指标的 Triebel-Lizorkin 空间和 Besov 空间的基础上，对这些函数空间系统地做了进一步推广和研究. 从我们目前的工作发现，还可以用小波和其他技巧整合成两组 6 个指标的函数空间. 我们知道一般的广义函数不能定义乘积，但是利用小波，可以更仔细地定义原来很难定义的两个相当一般的分布的乘积属于这种推广的空间中的元素，这些分布的乘积在 Triebel-Lizorkin 空间和 Besov 空间中本来是无法定义的. 它们在微分方程、量子力学、非线性分析和调和分析等理论和应用上都具有重要作用.



第四章　正交二进小波

小波自 20 世纪 80 年代成形以后，经历了一个突飞猛进的发展过程. 1990 年 Y. Meyer 与 R. Coifman 合作撰写的《小波与算子》的三卷本(第 Ⅰ 卷和第 Ⅱ 卷是 Y. Meyer 写的) 是国际上小波分析方面的第一套系统性著作. 小波随后传入中国，20 年后的现在，国内小波方面的著作甚多. 小波分析在函数论、算子论、偏微分方程、概率统计、非线性分析、分形、群论，数值分析、图像处理、信号传输、数据压缩、边缘探测，量子物理、量子化学、波动力学、医疗领域、密码学，等等方面都有着重要的应用. 我们乘坐的有卫星导航的车，网上的文字、图像、声音，大家越来越离不开的手机，几乎全与小波有关. 可见，我们每天至少间接地在与小波打交道.

小波本身的一些基本概念包括：多分辨率分析，小波基，框架结构；小波包，区域上的小波；小波构造，小波数值算法，小波分析性能；窗口 Fourier 变换，局部正弦基，局部余弦基；等等. 本章介绍由若干个小波函数的二进平移展缩生成的正交小波.

前面介绍了单位逼近和 Littlewood-Paley 分析，我们注意到这样一个事实：将一个分布 u 展开成级数 $\sum_j u_j$ 时，u_j 并不属于固定的空间 W_j，Littlewood-Paley 分析只有对频率的局部性，并没有对空间变量的局部性，这在理论上和应用上都带来一些不便. Gabor 还试图用窗口 Fourier 变换来获得某些特殊性质. “试图证明即使改进 Littlewood-Paley 分析后，我们仍然无法使得级数 $\sum_j u_j$ 中的 u_j 属于某个固定的空间 W_j” 自然就成为一种猜想. 正是 Meyer 院士在做这件事时发现了出乎意料的事情，得到了相反的结论. 虽然早在 1910 年 Haar 就发现了后来以他的名字命名的 Haar 小波，随后还有一些零星的正交小波发现，但第一次大批量产生的正则且正交的小波却是 Meyer 的这些工作. 不过小波这个名称却不是 Meyer 取的，这一名词来源于 Elf-Aguitaine 小组在勘察中对收集信号的处理，是 J. Morlet 在用反射来研究地震的工作中给出的. 他们使用了可允许的连续小波，并邀请数学家为他们的工作提供理论依据.

那些工程师们的工作在应用上为小波的迅速发展给足了人气，他们改进的传统的计算方法每次在计算机上实现效果很好，但从理论上没有严格的数学理论做支撑，指导进一步的算法的发展；每次都得在计算之后才能判断其效果，这是一种令人沮丧的事. 幸运的是Meyer和他的学生Mallat建立了工程数学的金字塔算法的严格数学基础，这标志了真正的多分辨率分析概念的诞生. 接着Daubechies在多分辨率分析概念的基础上用迭代的方法大批量地构造了具有紧支集的小波. 加上样条小波的发现等，这些构成了小波的初步的理论框架. 现在绝大多数情况下，小波基是通过多分辨率分析或更一般的投影算子理论来构造的；而且在相当弱的条件下，一组小波基也可以对应一个多分辨率分析. 正因为如此，在本章我们首先介绍多分辨率分析的定义及几个例子；然后研究怎样构造多分辨率分析，即研究尺度函数和滤波函数与多分辨率分析之间的关系；最后研究怎样通过多分辨率分析来生成小波基. 有了严格的数学基础后，各行各业的专家就明白了他们的信号图像、各种各样的数据和算法在应用上代表的真正含义.

4.1 多分辨率分析的定义与几个例子

小波基的构造大多按照一个通用的程序来进行，这就是多分辨率分析，它是1986年前后由S. Mallat与Y. Meyer在改善金字塔算法时共同创造的. 让我们回忆一下Riesz基的定义. 设H是一个Hilbert空间，$e_0,e_1,\cdots,e_k,\cdots$是$H$中的一列元素. 如果存在两个常数$C'>C>0$，使得对所有数列$\alpha_0$，$\alpha_1,\cdots$，有

$$C\Big(\sum_k|\alpha_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\leqslant\Big\|\sum_k\alpha_k e_k\Big\|\leqslant C'\Big(\sum_k|\alpha_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \tag{4.1}$$

成立，且使得(4.1)成立的有限和$\sum_k\alpha_k e_k$在H中稠密，就称$e_0,e_1,\cdots,e_k,\cdots$是$H$中的一组**Riesz基**. 这也就是说，存在一个H到$l^2(\mathbf{N})$的同构映射T，使得

$$Te_k=\boldsymbol{\varepsilon}_k,$$

其中$\boldsymbol{\varepsilon}_k$表示向量，它在第$k$项的分量等于1，其他项的分量都是零.

下面给出多分辨率分析的定义及几个例子.

定义4.1 $L^2(\mathbf{R}^n)$的一个**多分辨率分析**是$L^2(\mathbf{R}^n)$的一列单调上升的子空间$V_j(j\in\mathbf{Z})$，它们具有以下性质：

① $\bigcap\limits_{-\infty}^{\infty}V_j=\{0\}$，$\bigcup\limits_{-\infty}^{\infty}V_j$在$L^2(\mathbf{R}^n)$中稠密；

② $\forall f \in L^2(\mathbf{R}^n)$，$\forall j \in \mathbf{Z}$，$f(\boldsymbol{x}) \in V_j \Leftrightarrow f(2\boldsymbol{x}) \in V_{j+1}$；

③ $\forall f \in L^2(\mathbf{R}^n)$，$\forall \boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}^n$，有 $f(\boldsymbol{x}) \in V_0 \Leftrightarrow f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{k}) \in V_0$；

④ 存在一个函数 $g(\boldsymbol{x}) \in V_0$，使得 $g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{k})$ $(\boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}^n)$ 是空间 V_0 的一组 Riesz 基.

性质 ④ 中的 $g(\boldsymbol{x})$ 也称为**尺度函数**.

定义 4.2 （ⅰ） $L^2(\mathbf{R}^n)$ 的一个多分辨率分析 $V_j(j \in \mathbf{Z})$ 是**正交的**，如果对于满足 ④ 的函数 $g(\boldsymbol{x})$ 有 $g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{k})$ $(\boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}^n)$ 是空间 V_0 的一组正交基.

（ⅱ） 对于非负整数 r，$L^2(\mathbf{R}^n)$ 的一个多分辨率分析 $V_j(j \in \mathbf{Z})$ 是 **r 正则的**，如果可以选择满足 ④ 的函数 $g(\boldsymbol{x})$，使得对所有多重指标 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ $(|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant r)$ 及任意整数 $m \in \mathbf{N}$ 有

$$|\partial^{\alpha} g(\boldsymbol{x})| \leqslant C_m(1+|\boldsymbol{x}|)^{-m}. \tag{4.2}$$

例 1 设 V_0 由所有在 $[k,k+1)$，$k \in \mathbf{Z}$ 上取常值的 L^2 中的函数构成，

$$V_j=\{f(2^j x):\ f \in V_0\}.$$

则 $\{V_j\}_{-\infty}^{\infty}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的闭子空间的增加族. 性质 ① 由前几章的函数逼近知识得出；② 直接由 V_j 的定义得出；③ 直接由 V_0 的定义得出；至于 ④，取 $\varphi(x)=\chi_{[0,1)}(x)$ 为 $[0,1)$ 上的特征函数，则 $\{\varphi(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 是 V_0 的标准正交基，此时 $\{V_j\}_{-\infty}^{\infty}$ 没有正则性. 由此而得的小波基是 Haar 基，它是小波最早且最简单的例子. 这时，我们回到二进鞅论的情形，不考虑集合方面，在函数方面，多分辨率分析就作为二进鞅论的变化出现.

例 2 设 $r \in \mathbf{Z}_+$，令

$$g(x)=\chi_{[0,1)} \underbrace{*\cdots*}_{r} \chi_{[0,1)}(x), \tag{4.3}$$

其中 $\underbrace{*\cdots*}_{r}$ 表示 r 次卷积. 易知 $g(x)$ 是一个支集在 $[0,r+1]$ 上的属于 $C^{r-1}(\mathbf{R})$，且对于 $k \in [0,r] \cap \mathbf{Z}_+$ 是局限于 $[k,k+1]$ 上的 r 次多项式（这可由归纳法知，其中 $\chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]}=x\chi_{[0,1]}(x)+(2-x)\chi_{[1,2]}(x)$）. 设 V_0 是由 $\{g(x-k)\}_k$ 生成的 $L^2(\mathbf{R})$ 的闭平移不变子空间，

$$V_j=\{f(2^j x):\ f \in V_0\},\quad j \in \mathbf{Z}.$$

容易验证 $V_0 \subset V_1$. 实际上，$\forall f(x) \in V_0$ 有 $f(x)=\sum\limits_k a_k g(x-k)$. 利用 Fourier 变换有

$$\hat{f}(\xi)=\sum_k a_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}\hat{g}(\xi)=\Big(\sum_k a_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}\Big)\frac{\hat{g}(\xi)}{\hat{g}\left(\frac{\xi}{2}\right)}\hat{g}\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

由于函数 $g(x)$ 的 Fourier 变换为 $r+1$ 个特征函数的 Fourier 变换的乘积，因此有

$$\hat{g}(\xi)=\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}}{\mathrm{i}\xi}\right)^{r+1}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\xi}{2}(r+1)}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{-r-1}\left(\sin\frac{\xi}{2}\right)^{r-1}.$$

于是

$$\frac{\hat{g}(\xi)}{\hat{g}\left(\frac{\xi}{2}\right)}=\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\xi}{2}}}{2}\right)^{r+1}=\sum_{|k|\leqslant C}h_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{k}{2}\xi}.$$

如下定义 b_k：

$$\sum_k b_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{k}{2}\xi}\equiv\left(\sum_k a_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}\right)\left(\sum_k h_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{k}{2}\xi}\right).$$

从而 $b_k\in l^2$，$f(x)=2\sum_k b_k g(2x-k)$，这就导致 $f(x)\in V_1$.

对于性质 ④，注意到

$$\left\|\sum_k a_k g(x-k)\right\|_{L^2}=\left\|\sum_k a_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}\hat{g}(\xi)\right\|_{L^2}$$

$$=\left\|\left|\sum_k a_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}\right|^2\sum_\alpha|\hat{g}(\xi+2\pi\alpha)|^2\right\|^{\frac{1}{2}}_{L^1([-\pi,\pi])},$$

于是，函数

$$\sum_\alpha|\hat{g}(\xi+2\pi\alpha)|^2=|(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi})^{r+1}|^2\sum_\alpha|\xi+2\pi\alpha|^{-2r-2}.$$

由于对于任意的 $\xi\in[-\pi,\pi]$，$|(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi})^{r+1}|^2|\xi|^{-2r-2}$ 界于两个正数之间，而 $|(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi})^{r+1}|^2\sum_{\alpha\neq0}|\xi+2\pi\alpha|^{-2r-2}$ 有界，因此函数 $\sum_\alpha|\hat{g}(\xi+2\pi\alpha)|^2$ 是上下有界的. 从而 $\{g(x-k)\}_k$ 为 V_0 的 Riesz 基.

至于性质 ①，令 $h(x)$ 是由 Fourier 变换

$$\hat{h}(\xi)=\frac{\hat{g}(\xi)}{\sum_k|\hat{g}(\xi+2k\pi)|^2}$$

定义的函数；令 $g_{j,k}(x)=2^{\frac{j}{2}}g(2^jx-k)$，$h_{j,k}(x)=2^{\frac{j}{2}}h(2^jx-k)$，以及

$$P_j(x,y)=\sum_k g_{j,k}(x)h_{j,k}(y),$$

那么 $f(x)$ 在 V_j 上的投影 P_j 由

$$P_jf(x)=\int P_j(x,y)f(y)\mathrm{d}y$$

所定义. 由前面介绍的单位逼近和其他一些技巧知道，当 $j\to+\infty$ 时 P_j 趋向于单位算子；$j\to-\infty$ 时 P_j 趋向于零算子. 这超出了本课程的范围，这里不

予详细证明.

此时$\{V_j\}_{-\infty}^{\infty}$有$r$阶正则性. 由此而得的小波基是$r$-样条小波基，它有广泛应用.

例 3 (Shannon 小波)　定义V_0为$L^2(\mathbf{R})$的如下闭子空间：

$$V_0=\{f\in L^2(\mathbf{R}):\ \operatorname{supp}\hat{f}\subset[-\pi,\pi]\}.$$

定义V_j为V_0的2^j-伸缩，即

$$\begin{aligned}V_j&=\{f\in L^2(\mathbf{R}):\ f(2^{-j}x)\in V_0\}\\&=\{f\in L^2(\mathbf{R}):\ \operatorname{supp}\hat{f}\subset[-2^j\pi,2^j\pi]\}.\end{aligned}$$

这说明$\{V_j\}$是增加族. Shannon 的取样定理说明$g(x)=\dfrac{\sin\pi x}{\pi x}$使得$\{g(x-k)\}_k$构成$V_0$的标准正交基. 实际上，$\dfrac{\sin\pi(x-k)}{\pi(x-k)}$是$e^{-ik\xi}\chi_{[-\pi,\pi]}(\xi)$的 Fourier 逆变换；同时$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ikx}e^{-ilx}\,dx=\delta_{k,l}$.

如果$f(x)\in\bigcap\limits_j V_j$，我们对$f(x)$作 Fourier 变换，知道$\hat{f}(\xi)$是任意的$2^j2\pi$周期函数，因而只可能为 0. 对于稠密性，运用反证法，如果不成立，则存在非 0 的L^2函数$f(x)$，使得对于任意的V_j中的L^2函数$h(x)$有

$$\langle f(x),h(x)\rangle=0.$$

取 Fourier 变换有

$$\langle\hat{f}(\xi),\hat{h}(\xi)\rangle=0.$$

取h为V_j的基函数知$\hat{f}(\xi)$为 0，从而$f(x)=0$，这就导致矛盾.

虽然例 3 中的g是光滑的，但在无穷远处衰减性不够，故不正则.

下例是例 3 的正则化修正，是由 Meyer 在研究 Littlewood-Paley 分析时发现的.

例 4 (Meyer 小波或 Littlewood-Paley 小波)　令$\theta(\xi)$是一个无穷可微紧支集的实值偶函数，在$\left[-\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right]$上为1，在$\left[-\dfrac{4\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3}\right]$外为1，$0\leqslant\theta\leqslant1$且

$$\theta^2(\xi)+\theta^2(2\pi-\xi)=1,\quad\forall\xi\in[0,2\pi].$$

令$g(x)$为$\theta(\xi)$的 Fourier 逆变换. 因为

$$\langle g(x),g(x-k)\rangle=\int|\hat{g}(\xi)|^2e^{-ik\xi}d\xi=\int\sum_\alpha|\theta(\xi+2\pi\alpha)|^2e^{-ik\xi}d\xi,$$

又$\sum\limits_\alpha|\theta(\xi+2\pi\alpha)|^2=1$，所以

$$\langle g(x),g(x-k)\rangle=\delta_{0,k}.$$

故$\{g(x-k)\}_k$是它生成的闭子空间V_0的标准正交基.

注意到 $\theta\left(\frac{\xi}{2}\right)$ 在 $\left[-\frac{4\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$ 上为 1，故存在 $C^{\infty}(\mathbf{R})$ 的 4π 周期函数 $l(\xi)$（它就是 $\theta(\xi)$ 的 4π 周期光滑延拓）使

$$\theta(\xi)=l(\xi)\theta\left(\frac{\xi}{2}\right),\quad \forall \xi\in\mathbf{R}.$$

这说明，若定义 $V_j=\{f(2^jx):f\in V_0\}$，$j\in\mathbf{Z}$，则 $\{V_j\}$ 是增加族.

运用单位逼近知识和例子 2 中同样的原理知道性质 ① 成立.

例 4 中的多分辨率分析 $\{V_j\}$ 对任意正整数 r 均是 r- 正则的多分辨率分析. 以上介绍的都是一维的多分辨率分析，下面介绍如何通过一维的例子构造高维的情况.

例 5（高维情形可通过张量积来构成） 例如 $\{V_j^s\}_{-\infty}^{\infty}(s=1,2,\cdots,n)$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的使 V_0^s 有 Riesz 基 $\{g^s(x-k)\}_k$ 的多分辨率分析，则可定义 $\bigotimes_{s=1}^{n}V_0^s$ 为

$$\left\{f=\sum_{k=(k_1,k_2,\cdots,k_n)}c_k\prod_{s=1}^{n}g^s(x_s-k_s):\sum_{k=(k_1,k_2,\cdots,k_n)}|c_k|^2<\infty\right\};$$

定义

$$\bigotimes_{s=1}^{n}V_j^s=\left\{f(2^jx_1,2^jx_2,\cdots,2^jx_n):f\in\bigotimes_{s=1}^{n}V_0^s\right\}.$$

易知 $\bigotimes_{s=1}^{n}V_j^s$ 为 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 的多分辨率分析. 建议大家自己去逐点验证.

注释 在小波之前，单位逼近 $f*\varphi_t\to f$ 类似于多分辨率分析，但我们不知道 $f*\varphi_t$ 具体属于哪个空间，以致在应用和计算上造成不便. 多分辨率分析中克服了这个缺点，为理论和应用建立了某种联系. 在分析分布的性能时采用的是 Littlewood-Paley 分析的技巧，考虑类似 $f*\varphi_t-f*\varphi_{2t}$ 的差. 下面我们将看到在小波中是用小波基来处理的.

4.2 尺度函数与滤波函数

多分辨率分析具有良好的逼近性能，并且是以有限元的一种新的形式出现的. 与传统的有限元方法相比，小波提出了网的相容性. 其实在应用上，在小波提出来之前就使用了此观点. 著名的金字塔算法指出可以将数据过滤成低频部分和高频部分，这就是说，对于 V_{j+1} 中的一个数据

$$f(x)=\sum_{k\in\mathbf{Z}^n}a_{j+1,k}\Phi_{j+1,k}^{0}(x),$$

可过滤成 V_j 中的一个数据和另一空间 W_j 中的一个数据. 不过这些应用方面

的专家无法从理论上说明他们的算法是否行得通. 其实它的严格化可以从尺度函数、面具和滤波函数的关系来给出.

假设$\{\varphi(x-k)\}_{k\in Z^n}$构成$V_0$的一组基，$\{\varphi(2x-k)\}_{k\in Z^n}$构成$V_1$的一组基，$V_0\subset V_1$，那么存在$\{d_k\}_{k\in Z^n}$使得

$$\varphi(x)=2^n\sum_{k\in Z^n}d_k\varphi(2x-k). \tag{4.4}$$

这里 d_k 也称为 φ 的**面具**. 将(4.4)用 Fourier 变换的语言来描述可得

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(\xi)&=\int_{\mathbf{R}^n}2^n\sum_{k\in Z^n}d_k\varphi(2x-k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x\\&=\sum_{k\in Z^n}d_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\frac{\xi}{2}}\int_{\mathbf{R}^n}2^n\varphi(2x-k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2x-k)\frac{\xi}{2}}\,\mathrm{d}x\\&=m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right),\end{aligned} \tag{4.5}$$

这里$m_0(\xi)=\sum\limits_k d_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}$是由$\{d_k\}$定义的$2\pi$周期函数，它称为对应的**滤波函数**. 之所以称之为滤波函数是因为它像一个时间不变系统的频率相应函数，这样的系统使得输出信号的Fourier变换是输入信号的Fourier变换与一个由系统决定的函数的乘积. 其函数起滤波的作用，因而叫滤波函数，这个系统叫**滤波器**. $m_0(\xi)$ 也称为面具$\{d_k\}$的**符号**. 下面介绍一个正交的多分辨率分析$\{V_j\}$的滤波函数等相关函数所具有的性质.

记 $E_d=\{$方体$[0,1]^n$ 的 2^n 个顶点$\}=\{0,1\}^n$. 那么 $\varphi(x)$ 与 $m_0(\xi)$ 具有如下性质:

定理4.1 设$\{V_j\}$是一个正交的多分辨率分析，$\hat{\varphi}(\xi)$ 与 $m_0(\xi)$ 都连续，则

(i) $\Phi(\xi)=[\hat{\varphi},\hat{\varphi}](\xi)=\sum\limits_{\alpha\in Z^n}|\hat{\varphi}(\xi+2\pi\alpha)|^2$ 是下半连续的，且

$$\Phi(\xi)=1,\quad \forall\,\text{a.e. }\xi\in\mathbf{R}^n;$$

(ii) $\sum\limits_{\nu\in E^n}|m_0(\xi+\nu\pi)|^2=1$，$\forall\xi\in[0,\pi]^n$;

(iii) $|\hat{\varphi}(\mathbf{0})|=1$，$m_0(\mathbf{0})=1$，$\hat{\varphi}(2\pi\alpha)=0$，$\forall\alpha\in Z^n\backslash\{\mathbf{0}\}$;

(iv) 若 $\varphi\in L^1(\mathbf{R}^n)$，则 $\sum\limits_{k\in Z^n}\varphi(x-k)=\hat{\varphi}(\mathbf{0})$，a.e. $x\in\mathbf{R}^n$.

证 (i) 考虑 2π 周期函数 $\Phi(\xi)$ 的 Fourier 变换:

$$\int_{[0,2\pi]^n}\Phi(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}\,\mathrm{d}\xi=\int_{[0,2\pi]^n}\sum_{\alpha\in Z^n}|\hat{\varphi}(\xi+2\pi\alpha)|^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}\,\mathrm{d}\xi.$$

做变量替换，得到

$$\int_{[0,2\pi]^n} \Phi(\xi) e^{-ik\xi} d\xi = \sum_{\alpha \in Z^n} \int_{2\pi\alpha + [0,2\pi]^n} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 e^{-ik\xi} d\xi$$
$$= \int |\hat{\varphi}(\xi)|^2 e^{-ik\xi} d\xi.$$

对 $\hat{\varphi}(\xi)$ 取 Fourier 逆变换，得到

$$\int_{[0,2\pi]^n} \Phi(\xi) e^{-ik\xi} d\xi = (2\pi)^n \langle \varphi(x), \varphi(x-k) \rangle.$$

再由多分辨率分析的正交性有

$$\langle \varphi(x), \varphi(x-k) \rangle = \delta_{0,k}.$$

于是，根据 Fourier 变换的知识，一个 2π 周期的函数的 Fourier 变换系数只有在 k 为 $\mathbf{0}$ 时不为 0，即几乎处处为常数，因此 $\Phi(\xi)$ 几乎处处为常数 1.

要证明 $\Phi(\xi)$ 是下半连续的，即证明

$$\varliminf_{\xi \to \xi_0} \Phi(\xi) \geqslant \Phi(\xi_0), \quad \forall \xi_0 \in [0,2\pi]^n. \tag{4.6}$$

注意到对于任意 $\xi_0 \in [0,2\pi]^n$，若 $|\Phi(\xi_0)| < \infty$，则对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 N 使得

$$\sum_{|\alpha| \leqslant N} |\hat{\varphi}(\xi_0 + 2\pi\alpha)|^2 \geqslant \Phi(\xi_0) - \varepsilon.$$

由 $\hat{\varphi}$ 的连续性知存在邻域 U_{ξ_0} 使得

$$\sum_{|\alpha| \leqslant N} |\hat{\varphi}(\xi + 2\pi\alpha)|^2 \geqslant \Phi(\xi_0) - 2\varepsilon, \quad \forall \xi \in U_{\xi_0}.$$

这就是说，

$$\Phi(\xi) \geqslant \Phi(\xi_0) - 2\varepsilon, \quad \forall \xi \in U_{\xi_0}.$$

因此(4.6) 成立. 对于 $\Phi(\xi_0) = \infty$ 可同样证明.

(ⅱ) 由 $\hat{\varphi}(\xi)$ 和 $\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$ 的关系知

$$\sum_{\alpha \in Z^n} |\hat{\varphi}(\xi + 2\pi\alpha)|^2 = \sum_{\alpha \in Z^n} \left| m_0\left(\frac{\xi + 2\pi\alpha}{2}\right) \right|^2 \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\xi + 2\pi\alpha}{2}\right) \right|^2.$$

注意到 $\alpha \in \mathbf{Z}^n$ 可以用唯一方式写为

$$\alpha = 2\beta + \nu, \quad \beta \in \mathbf{Z}^n, \nu \in E_n,$$

代入有

$$\sum_{\alpha \in Z^n} |\hat{\varphi}(\xi + 2\pi\alpha)|^2 = \sum_{\nu \in Z^n} \left| m_0\left(\frac{\xi}{2} + \nu\pi\right) \right|^2 \sum_{\beta \in Z^n} \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + \nu\pi + 2\pi\beta\right) \right|^2.$$

运用(ⅰ)的结论有

$$\sum_{\nu \in Z^n} \left| m_0\left(\frac{\xi}{2} + \nu\pi\right) \right|^2 = 1, \quad \forall \text{a. e. } \xi \in \mathbf{R}^n.$$

由于 $m_0(\xi)$ 连续，因此有结论(ⅱ).

(iii) 假设 $\hat{\varphi}(\mathbf{0})=0$. 重复使用(4.5)，有

$$\hat{\varphi}(\boldsymbol{\xi})=\prod_{j=1}^{j_0} m_0(2^{-j}\boldsymbol{\xi})\hat{\varphi}(2^{-j_0}\boldsymbol{\xi}).$$

注意到$|m_0(\boldsymbol{\xi})|\leqslant 1$ 和 $\hat{\varphi}(\boldsymbol{\xi})$ 的连续性，令 $j_0\to+\infty$ 就得到

$$\hat{\varphi}(\boldsymbol{\xi})=0,\quad \forall\boldsymbol{\xi}\in\mathbf{R}^n.$$

这与$\{\varphi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{k})\}_{\boldsymbol{k}}$ 生成 V_0 矛盾. 故 $\hat{\varphi}(\mathbf{0})\neq 0$.

再由 $\hat{\varphi}(\mathbf{0})=m_0(\mathbf{0})\hat{\varphi}(\mathbf{0})$ 知

$$m_0(\mathbf{0})=1=m_0(2\pi\boldsymbol{\alpha}),\quad \forall\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{Z}^n.$$

由于 $\forall\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{Z}^n\backslash\{\mathbf{0}\}$ 有

$$\hat{\varphi}(2^{j_0+1}\pi\boldsymbol{\alpha})=\prod_{j=1}^{j_0} m_0(2^{j_0-j}2\pi\boldsymbol{\alpha})\hat{\varphi}(2\pi\boldsymbol{\alpha})=\hat{\varphi}(2\pi\boldsymbol{\alpha}),$$

于是，若 $\hat{\varphi}(2\pi\boldsymbol{\alpha})\neq 0$ 将导致 $\Phi(\mathbf{0})=\infty$，与 $\Phi(\mathbf{0})\leqslant 1$ 矛盾.

下面证明$|\hat{\varphi}(\mathbf{0})|=1$，否则由$|\hat{\varphi}(\mathbf{0})|\leqslant\Phi(\mathbf{0})\leqslant 1$ 和 $\hat{\varphi}(\boldsymbol{\xi})$ 在 $\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0}$ 连续，知存在 $0<\delta,\varepsilon<1$ 使得当$|\boldsymbol{\eta}|\leqslant\delta$ 时$|\hat{\varphi}(\boldsymbol{\eta})|\leqslant\varepsilon$.

由结论(ii)，利用归纳法有

$$\int_{[-2^j\pi,2^j\pi]^n}\prod_{s=1}^{j}|m_0(2^{-s}\boldsymbol{\xi})|^2\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}=(2\pi)^n. \tag{4.7}$$

实际上，利用周期性，我们有

$$\int_{[-2^j\pi,2^j\pi]^n}\prod_{s=1}^{j}|m_0(2^{-s}\boldsymbol{\xi})|^2\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}=\int_{[0,2^{j+1}\pi]^n}\prod_{s=1}^{j}|m_0(2^{-s}\boldsymbol{\xi})|^2\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}.$$

将积分区域等分成 2^n 个方体并进行变量替换，就得到

$$\begin{aligned}&\int_{[-2^j\pi,2^j\pi]^n}\prod_{s=1}^{j}|m_0(2^{-s}\boldsymbol{\xi})|^2\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\\&=\sum_{\boldsymbol{\nu}\in E_n}\int_{2^j\pi\boldsymbol{\nu}+[0,2^j\pi]^n}\prod_{s=1}^{j-1}|m_0(2^{-s}\boldsymbol{\xi})|^2|m_0(2^{-j}\boldsymbol{\xi})|^2\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\\&=\int_{[0,2^j\pi]^n}\prod_{s=1}^{j-1}|m_0(2^{-s}\boldsymbol{\xi})|^2\sum_{\boldsymbol{\nu}\in E_n}|m_0(2^{-j}\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\nu}\pi)|^2\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}.\end{aligned}$$

利用性质(ii)，得到

$$\int_{[-2^j\pi,2^j\pi]^n}\prod_{s=1}^{j}|m_0(2^{-s}\boldsymbol{\xi})|^2\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}=\int_{[0,2^j\pi]^n}\prod_{s=1}^{j-1}|m_0(2^{-s}\boldsymbol{\xi})|^2\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}.$$

利用周期性变换积分区域，从层次 j 转化为层次 $j-1$ 的情形：

$$\int_{[-2^j\pi,2^j\pi]^n}\prod_{s=1}^{j}|m_0(2^{-s}\boldsymbol{\xi})|^2\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}=\int_{[-2^{j-1}\pi,2^{j-1}\pi]^n}\prod_{s=1}^{j-1}|m_0(2^{-s}\boldsymbol{\xi})|^2\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}.$$

$\forall j \in \mathbf{N}$，反复运用(4.5)，有

$$\int_{|\xi|\leqslant 2^j\delta} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi = \int_{|\xi|\leqslant 2^j\delta} \prod_{s=1}^{j} |m_0(2^{-s}\xi)|^2 |\hat{\varphi}(2^{-j}\xi)|^2 \mathrm{d}\xi.$$

运用对 $\hat{\varphi}(\mathbf{0})$ 的反设，有

$$\int_{|\xi|\leqslant 2^j\delta} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi \leqslant \varepsilon^2 \int_{|\xi|\leqslant 2^j\delta} \prod_{s=1}^{j} |m_0(2^{-s}\xi)|^2 \mathrm{d}\xi$$
$$\leqslant \varepsilon^2 \int_{[-2^j\pi, 2^j\pi]^n} \prod_{s=1}^{j} |m_0(2^{-s}\xi)|^2 \mathrm{d}\xi.$$

再运用(4.7)，我们有

$$\int_{|\xi|\leqslant 2^j\delta} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi \leqslant \varepsilon^2 (2\pi)^n. \tag{4.8}$$

另一方面，当 $j \to \infty$ 时有

$$(2\pi)^{-n} \int_{|\xi|\leqslant 2^j\delta} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi \to (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi = \int |\varphi(\boldsymbol{x})|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 1.$$

此与(4.8)矛盾.

(iv) 由于 $\sum_{\boldsymbol{k}\in \boldsymbol{Z}^n} |\varphi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{k})| \in L^1([0,1]^n)$ 是几乎处处收敛的级数，$\sum_{\boldsymbol{k}\in \boldsymbol{Z}^n} \varphi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{k})$ 的 Fourier 系数为

$$\int \sum_{\boldsymbol{k}\in \boldsymbol{Z}^n} \varphi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{k}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{x}} \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \sum_{\boldsymbol{k}\in \boldsymbol{Z}^n} \int_{\boldsymbol{k}+[0,1]^n} \varphi(\boldsymbol{x}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{x}} \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \hat{\varphi}(2\pi\boldsymbol{\alpha}),$$

因此

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in \boldsymbol{Z}^n} \varphi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{k}) = \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in \boldsymbol{Z}^n} \hat{\varphi}(2\pi\boldsymbol{\alpha}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{x}}, \quad \forall \text{a.e. } \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$$

由于 $\hat{\varphi}(2\pi\boldsymbol{\alpha})$ 只在 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 时非零，因此

$$\sum_{\boldsymbol{k}} \varphi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{k}) = \hat{\varphi}(\mathbf{0}), \quad \forall \text{a.e. } \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n.$$ ∎

注释 对于双正交的多分辨率分析有相似结论，不过叙述和证明更为复杂.

下面我们来看滤波函数与尺度函数的关系.

定理4.2 给定一个 $2\pi\boldsymbol{Z}^n$ 周期的连续函数 $m_0(\xi) = \sum_{\boldsymbol{k}} d_{\boldsymbol{k}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\xi}$ 满足 $m_0(\mathbf{0}) = 1$ 和 $\sum_{\nu\in E_n} |m_0(\xi+\nu\pi)|^2 = 1$，并且在点态意义下可以定义出连续函数

$$\hat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{+\infty} m_0(2^{-j}\xi), \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^n,$$

那么有 $\varphi(\boldsymbol{x}) \in L^2$.

证 首先由 $\hat{\varphi}(\xi)$ 的定义有

$$I_j = \int_{[-2^j\pi,2^j\pi]^n} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi$$
$$= \int_{[-2^j\pi,2^j\pi]^n} \prod_{s=1}^{j} |m_0(2^{-s}\xi)|^2 |\hat{\varphi}(2^{-j}\xi)|^2 d\xi.$$

再由 $m_0(\xi)$ 的性质有

$$I_j \leqslant \int_{[-2^j\pi,2^j\pi]^n} \prod_{s=1}^{j} |m_0(2^{-s}\xi)|^2 d\xi = (2\pi)^n.$$

由控制收敛定理有

$$\|\hat{\varphi}(\xi)\|_{L^2} \leqslant (2\pi)^n,$$

因而 $\varphi(\boldsymbol{x}) \in L^2$. ∎

下面研究滤波函数生成正交多分辨率分析的充要条件. A. Cohen 是一位著名的年轻数学家，他在 Y. Meyer 指导下以很短的时间完成了他的博士论文，然后到美国跟 I. Daubechies 做了一年博士后，回到法国后他申请到了法国数学实力很强的巴黎六大的教授职位. 2002 年数学家大会邀请他作了 45 分钟的报告，与会人群挤到了报告厅外面的走廊上. 下面首先看看以他的名字命名的一个条件：

定义 4.3 （ⅰ） $\mathbf{R}^n$ 中的一个紧集 K 被称为**同余于** $[-\pi,\pi]^n$，如果 K 的测度 $|K|=(2\pi)^n$ 且 $\forall \xi \in [-\pi,\pi]^n$，$\exists \boldsymbol{\eta} \in K$ 使得 $\xi - \boldsymbol{\eta} \in 2\pi\mathbf{Z}^n$.

（ⅱ） $m_0(\xi) \in C([-\pi,\pi]^n)$ 满足 **Cohen 条件**，如果存在与 $[-\pi,\pi]^n$ 同余的紧集 K，以 $\mathbf{0}$ 为内点，使得

$$\inf\{|m_0(2^{-j}\xi)| : j \geqslant 1,\ \xi \in K\} \geqslant C_0 > 0.$$

定理 4.3 给定一个 $2\pi\mathbf{Z}^n$ 周期的连续函数 $m_0(\xi) = \sum_k d_k e^{-ik\xi}$ 满足 $m_0(\mathbf{0}) = 1$ 和 $\sum_{\nu \in E_n} |m_0(\xi + \nu\pi)|^2 = 1$，并且在点态意义下可以定义出连续函数

$$\hat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{+\infty} m_0(2^{-j}\xi), \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^n,$$

那么有

（ⅰ） 如果 $m_0(\xi)$ 满足 Cohen 条件，则 $\{\varphi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{k})\}_k$ 标准正交；

（ⅱ） 反过来，若 $\{\varphi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{k})\}_k$ 标准正交且 $\Phi(\xi)$ 连续，则 $m_0(\xi)$ 满足 Cohen 条件.

证明思想 对于（ⅰ），我们首先构造一列标准正交的函数 $\{\varphi_j(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{k})\}$，

然后利用 Cohen 条件证明这组函数的 Fourier 变换被 $C\hat{\varphi}(\xi)$ 控制，由此得到结论. 对于(ⅱ)，我们利用 $\Phi(\xi)=1$ 找出一个正整数 A 和有限覆盖，使得其中的有限项之和大于$\frac{1}{2}$，从而对于任意的 $\xi\in[-\pi,\pi]^n$ 均存在范数小于 A 的整数 $\boldsymbol{k}$ 使得 $|\hat{\varphi}(\xi+2\boldsymbol{k}\pi)|$ 大于给定正数；由此可以构造同余于 $[-\pi,\pi]^n$ 的紧集 K. 再利用一些函数在 K 上有正的上界推出滤波函数满足 Cohen 条件.

证 （ⅰ） 首先类似于前面的证明有，$\hat{\varphi_j}(\xi)=\prod_{s=1}^{j}m_0(2^{-s}\xi)\chi_{2^jK}(\xi)$ 的 Fourier 变换满足

$$\int|\hat{\varphi_j}(\xi)|^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\xi}\,\mathrm{d}\xi=(2\pi)^n\delta_{\boldsymbol{0},\boldsymbol{k}},\quad \forall\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n,\ j\geqslant 0. \tag{4.9}$$

然后利用Cohen条件证明在 L^2 意义下 $\hat{\varphi_j}(\xi)\to\hat{\varphi}(\xi)$. 实际上，由于 $\hat{\varphi}(\xi)$ 连续且 $\hat{\varphi}(\mathbf{0})=1$，就存在正整数 j 使得 $\forall\xi\in K$，$s\geqslant j$ 有 $|\hat{\varphi}(2^{-s}\xi)|\geqslant\frac{1}{2}$. 由于

$$\hat{\varphi}(\xi)=\prod_{s=1}^{j}m_0(2^{-s}\xi)\hat{\varphi}(2^{-j}\xi),$$

运用 Cohen 条件有 $\forall\xi\in K$，$|\hat{\varphi}(\xi)|\geqslant C>0$. 于是，$\forall\xi\in 2^jK$，

$$|\hat{\varphi}(2^{-j}\xi)|\geqslant C>0.$$

这就是说，

$$|\hat{\varphi_j}(\xi)|\leqslant\frac{|\hat{\varphi}(\xi)|}{C},\quad \forall\xi\in K.$$

运用(4.9)就得到标准正交性.

（ⅱ） 由条件有 $\Phi(\xi)=1$，$\forall\xi$. 于是，对每一个 $\xi\in[-\pi,\pi]^n$，存在正数 A_ξ 使得

$$\sum_{|\boldsymbol{k}|\leqslant A_\xi}|\hat{\varphi}(\xi+2\boldsymbol{k}\pi)|^2\geqslant\frac{3}{4},$$

且存在 ξ 的一个邻域 U_ξ 使得

$$\sum_{|\boldsymbol{k}|\leqslant A_\xi}|\hat{\varphi}(\boldsymbol{\eta}+2\boldsymbol{k}\pi)|^2\geqslant\frac{1}{2},\quad \forall\boldsymbol{\eta}\in U_\xi.$$

由于 $[-\pi,\pi]^n$ 存在有限覆盖 $\{U_{\xi_j}\}_{0\leqslant j\leqslant m}$，令 $A=\max A_{\xi_j}$，就得到

$$\sum_{|\boldsymbol{k}|\leqslant A}|\hat{\varphi}(\xi+2\boldsymbol{k}\pi)|^2\geqslant\frac{1}{2},\quad \forall\xi\in[-\pi,\pi]^n.$$

对 $|\boldsymbol{k}|\leqslant A$，令 $\boldsymbol{k}_1=\mathbf{0}$，再按任意方式排列剩下的为 $\boldsymbol{k}_2,\cdots,\boldsymbol{k}_M$. 于是，$\forall\xi\in[-\pi,\pi]^n$，$\exists\boldsymbol{k}\in\{\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\cdots,\boldsymbol{k}_M\}$ 使得

$$|\hat{\varphi}(\xi+2\boldsymbol{k}\pi)|^2\geqslant\frac{1}{2M}=C_1^2.$$

令 $S_1=\{\boldsymbol{\xi}\in[-\pi,\pi]^n: |\hat{\varphi}(\boldsymbol{\xi})|\geqslant C_1\}$，则 $\mathbf{0}$ 为 S_1 的内点；若 $j\geqslant 2$，令

$$S_j=\{\boldsymbol{\xi}\in[-\pi,\pi]^n-\bigcup_{i=1}^{j-1}S_i: |\hat{\varphi}(\boldsymbol{\xi}+2\boldsymbol{k}_j\pi)|\geqslant C_1\},$$

根据 $\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\cdots,\boldsymbol{k}_M$ 的选取，$[-\pi,\pi]^n=\bigcup_{j=1}^{M}S_j$ 是一个剖分. 定义

$$K=\overline{\bigcup_{j=1}^{M}(S_j+2\boldsymbol{k}_j\pi)},$$

则 K 与 $[-\pi,\pi]^n$ 同余.

由 $m_0(\mathbf{0})=1$ 和 $m_0(\boldsymbol{\xi})$ 的连续性知，存在原点的一个邻域 U 使得对于任意的 $\boldsymbol{\xi}\in U$ 有 $|m_0(\boldsymbol{\xi})|\geqslant\frac{1}{2}$. 于是，对于紧集 K，存在 j_0 使得当 $s>j_0$ 时

$$\inf\{|m_0(2^{-s}\boldsymbol{\xi})|: \boldsymbol{\xi}\in K\}\geqslant\frac{1}{2}.$$

再利用 $|\hat{\varphi}(\boldsymbol{\xi})|$ 在 K 上有正的下界，以及 $|\hat{\varphi}(2^{-j_0}\boldsymbol{\xi})|$ 在 K 上有正的上界知，

$$\prod_{s=1}^{j_0}|m_0(2^{-s}\boldsymbol{\xi})|=\frac{|\hat{\varphi}(\boldsymbol{\xi})|}{|\hat{\varphi}(2^{-j_0}\boldsymbol{\xi})|}$$

在 K 上有正的下界. 由于 $\forall 1\leqslant s\leqslant j_0$，$|m_0(2^{-s}\boldsymbol{\xi})|$ 在 K 上有正的上界 1，并且乘积有正的下界，因此 $\forall 1\leqslant s\leqslant j_0$，$|m_0(2^{-s}\boldsymbol{\xi})|$ 在 K 上有正的下界. ∎

4.3 小波基

小波基的概念并不只局限于正交基，它可以包含双正交基，甚至是框架. 但作为一入门课程，我们只介绍正交小波基. 根据简单容易的入门原则，我们首先介绍一维空间的小波基，然后介绍通过张量积和对坐标的旋转可以得到高维的小波基. 这里指出高维的小波基实际上也是通过一维空间的小波基的张量积和对坐标的旋转得到的. 另外，大部分小波基是从多分辨率分析得来的，特别对于正交小波，20 世纪 90 年代中期 Lemarié 用投影算子的方法证明了稍微有正则性的小波基和尺度函数可以相互推出，且具有相同性质；但在不具有任何正则性的情形存在例外. 大约十年前，人们又证明了非正交的情形即使具有正则性也有例外. 作为启蒙课程，我们不从投影算子出发研究，而从滤波函数及多分辨率分析出发来介绍如何构造小波基.

首先看一维情形. 设 $m\in\mathbf{Z}$ 是一个非负整数. 对于一个实变量的函数 $\psi(x)$，$\forall j\in\mathbf{Z}$，$k\in\mathbf{Z}$，令

$$\psi_{j,k}(x)=2^{\frac{j}{2}}\psi(2^jx-k).$$

如果 $\psi(x)$ 满足下面性质，则称它为 m **正则的小波**：

(a) 若 $m=0$，则 $\psi(x)\in L^{\infty}(\mathbf{R})$；若 $m\geqslant 1$，则 $\psi(x)$ 及它的直到 m 阶的导数都属于 $L^{\infty}(\mathbf{R})$；

(b) $\psi(x)$ 及其直到 m 阶的导数在无穷远处都是速降的；

(c) 对 $0\leqslant k\leqslant m$，有 $\int_{-\infty}^{\infty}x^k\psi(x)\mathrm{d}x=0$；

(d) 函数组 $\{\psi_{j,k}(x)\}_{j\in\mathbf{Z},\,k\in\mathbf{Z}}$ 构成 $L^2(\mathbf{R})$ 的一组正交基.

实际上，条件(d) 保证了小波在分析我们面临的对象时有简单算法；条件(c) 保证了分析光滑函数时系数的快速衰减性；条件(a) 和(b) 保证了从小波系数可以很好地恢复原来的对象.

令 $W_j=\left\{f=\sum_k a_k\psi_{j,k}(x):\{a_k\}\in l^2\right\}$，则得到 $L^2(\mathbf{R})$ 为一组相互正交的空间的直和：$L^2(\mathbf{R})=\bigoplus W_j$. 对于 $f\in L^2$，定义 $a_{j,k}=(f,\psi_{j,k})$，在 $L^2(\mathbf{R})$ 意义下下式成立：

$$f(x)=\sum_{j,k}a_{j,k}\psi_{j,k}(x). \tag{4.10}$$

当 $f(x)\in L^p$ $(1<p<\infty)$ 时(4.10) 还有效，但在 $p=1$ 或 ∞ 时不再能用小波系数的绝对值的某种组合来反映其范数. 实际上，在 L^1 和 L^{∞} 这两个空间中不存在无条件基.

当小波是充分正则时，小波可以分析缓增性小于小波正则性的任意齐次分布和非齐次分布，但需要使用不同的基，否则会出现荒谬的结论. 在介绍多分辨率分析 $\{V_j\}_j$ 时，其中有一个假设是这些空间的交为 $\mathbf{0}$，并在 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 中稠密. 前面我们在介绍单位逼近时分析了在非齐次分布时只考虑 $t\to 0$ 的情形，在齐次分布时同时考虑 $t\to 0$ 和 $t\to\infty$ 的情形. 对应地，在考虑 Littlewood-Paley 分解时的单位分解也有类似的不同方法.

上面的基是为齐次分布而构造的. 首先我们看 $f(x)$ 恒为 1 时，f 的所有小波系数都是零，因此(4.10) 的右边每一项都恒为零，其和自然为零. 这与左边为 1 矛盾. 相当多的学者认为导致这一现象的原因是 L^{∞} 没有无条件基；其实并非如此，这是由于在齐次分布的意义下，常数 1 是其中的零元素，而我们上面的基是为齐次分布而作的. 如果把 1 看成不为零元素的量，就必须在非齐次分布的意义下；这时为了避免 1 为零元素这种情况，我们要使用与非齐次分布对应的基. 注意到对尺度函数 $\varphi(x)$，小波基由 $\varphi(x-k)$ $(k\in\mathbf{Z})$ 与 $\psi_{j,k}(x)$ $(j\geqslant 0,\ k\in\mathbf{Z})$ 构成，用这组基分析恒为 1 的函数 $f(x)$ 就不会出现(4.10) 中出现的荒谬结论.

来源于多分辨率分析的尺度函数 φ 也称为**父小波**，而小波 ψ 称为**母小波**.

从母小波和滤波函数的性质出发很难精确回复父小波的各种性质；但从父小波出发则可较好地回复母小波的性质.

定理4.4　设$\{V_j\}$是由φ生成的正交多分辨率分析，对应的滤波函数为$m_0(\xi)=\sum_k d_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}$，$\{d_k\}\in l^2$. 令

$$m_1(\xi)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}\,\overline{m_0}(\xi+\pi)=\sum_k \overline{d_{1-k}}(-1)^{k-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi},\quad \{d_k\}\in l^2.$$

定义$\psi(x)$为

$$\hat{\psi}(\xi)=m_1\left(\frac{\xi}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right),$$

则$\{\psi_{j,k}(x)\}$构成$L^2(\mathbf{R})$的标准正交基.

对于一个正交多分辨率分析$\{V_j\}$，令$W_j=V_{j+1}\ominus V_j$，则得到$L^2(\mathbf{R})$的正交直和分解$L^2(\mathbf{R})=\bigoplus W_j$. 于是，为得到$L^2(\mathbf{R})$的标准正交小波基，只需找到$\psi\in V_1$，使得$\{\psi(x-k)\}_k$构成$W_0$的标准正交基. 这等价于先找到$W_{-1}$的标准正交基. 为简化记号，下面来找$W_{-1}$的标准正交基. 利用尺度方程的Fourier变换和滤波函数的性质，从Fourier变换的角度来做这件事.

已知存在$L^2([0,2\pi])$中函数$m_0(\xi)=\sum_k d_k \mathrm{e}^{-k\xi}$满足

$$\hat{\varphi}(2\xi)=m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi),\quad m_0(0)=1,$$

$$|m_0(\xi)|^2+|m_0(\xi+\pi)|^2=1,\quad \forall\,\text{a. e. }\xi\in[0,2\pi].$$

要在V_0中找到一个$\psi(x)$使得$\psi(x)\perp V_{-1}$，等价地，要使得$\hat{\psi}(\xi)\perp(V_{-1})^\wedge$. 我们从

$$V_{-1}=\left\{\frac{1}{2}\sum_k c_k\varphi\left(\frac{x}{2}-k\right):\{c_k\}\in l^2\right\}$$

出发来描述$(V_{-1})^\wedge$. 实际上，

$$(V_{-1})^\wedge=\Big\{\sum_k c_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2k\xi}\hat{\varphi}(2\xi)=m(2\xi)\hat{\varphi}(2\xi)=m(2\xi)m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi):$$

$$m(\xi)\in l^2([0,2\pi])\Big\}.$$

待定$\psi(x)=\sum_k b_k\varphi(x-k)$，$\{b_k\}\in l^2$相当于待定

$$\hat{\psi}(\xi)=l(\xi)\hat{\varphi}(\xi),\quad l(\xi)\in L^2([0,2\pi]).$$

$\hat{\psi}\perp(V_{-1})^\wedge$的充分必要条件是

$$\int_{-\infty}^{\infty} m(2\xi)m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi)\bar{l}(\xi)\,\bar{\hat{\varphi}}(\xi)\mathrm{d}\xi=0,\quad \forall\, m(\xi)\in L^2([0,2\pi]).$$

将积分区间变到$[2k\pi,2(k+1)\pi]$，并进行变量替换，得到在$[0,2\pi]$上的

积分：

$$\int_{[0,2\pi]} m(2\xi)m_0(\xi)\bar{l}(\xi)\sum_{\alpha}|\hat{\varphi}(\xi+2\pi\alpha)|^2 \mathrm{d}\xi=0,\quad \forall m(\xi)\in L^2([0,2\pi]).$$

由于$\sum_{\alpha}|\hat{\varphi}(\xi+2\pi\alpha)|^2=1$，a. e. ξ，则上式等价于

$$\int_{[0,2\pi]} m(2\xi)m_0(\xi)\bar{l}(\xi)\mathrm{d}\xi=0,\quad \forall m(\xi)\in L^2([0,2\pi]).$$

由于$m(2\xi)$的周期为π，则有

$$\int_{[0,\pi]} m(2\xi)(m_0(\xi)\bar{l}(\xi)+m_0(\xi+\pi)\bar{l}(\xi+\pi))\mathrm{d}\xi=0,$$

$$\forall m(\xi)\in L^2([0,2\pi]).$$

由$m(2\xi)$在$[0,\pi]$上的任意性，上式等价于

$$m_0(\xi)\bar{l}(\xi)+m_0(\xi+\pi)\bar{l}(\xi+\pi)=0,\quad \text{a. e. }\xi\in(0,\pi).$$

因此寻找$\hat{\psi}$使$\hat{\psi}\perp(V_{-1})^{\wedge}$的问题便转化为寻找向量$(l(\xi),l(\xi+\pi))$，使它与已知单位向量$(m_0(\xi),m_0(\xi+\pi))$正交. 不妨假设规范化$(l(\xi),l(\xi+\pi))$为单位向量. 这就是说，当已给定二阶复矩阵第一行的单位向量$(m_0(\xi),m_0(\xi+\pi))$后，如何扩充它使之对 a. e. ξ 成为酉矩阵.

将解待定为$(l(\xi),l(\xi+\pi))$. 既然$m_0(\xi)$与$m_0(\xi+\pi)$对 a. e. ξ不同时为0，故存在2π周期函数$\lambda(\xi)$使得

$$l(\xi)=\lambda(\xi)\overline{m_0}(\xi+\pi),\quad \text{a. e. }\xi. \tag{4.11}$$

它来自于$l(\xi)\overline{m_0}(\xi)+l(\xi+\pi)\overline{m_0}(\xi+\pi)=0$，于是

$$\lambda(\xi)=\frac{l(\xi)}{\overline{m_0}(\xi+\pi)}\text{ 或}-\frac{l(\xi+\pi)}{\overline{m_0}(\xi)},\quad \text{a. e. }\xi.$$

$\lambda(\xi)$显然满足

$$\lambda(\xi)+\lambda(\xi+\pi)=0,\quad \text{a. e. }\xi.$$

这说明$\lambda(\xi)$的 Fourier 展开式中只含奇次项系数，即

$$\lambda(\xi)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}v(2\xi),\quad v(\xi)\text{ 为 }2\pi\text{ 周期函数}. \tag{4.12}$$

反之，所有由(4.11)和(4.12)定义的函数$l(\xi)$，规范化所得的单位向量便给出酉矩阵扩充所需要的第二行向量. 在所有可能中取由$\hat{\psi}(\xi)=l(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$定义的$\psi(x)$满足$\{\sqrt{2}\,\psi(x-2k)\}_k$构成的规范正交系. 这等价于

$$\begin{aligned}2\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\bar{\psi}(x-2k)\mathrm{d}x&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{\psi}(\xi)|^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\xi}\mathrm{d}\xi\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sum_{\alpha\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(\xi+\pi\alpha)|^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\xi}\mathrm{d}\xi\\&=\delta_{0,k},\quad \forall k\in\mathbf{Z}.\end{aligned} \tag{4.13}$$

于是导出

$$\sum_{\alpha\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(\xi+\pi\alpha)|^2=1,\quad \text{a. e. } \xi. \tag{4.14}$$

由于有

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(\xi+\pi\alpha)|^2&=\sum_{\alpha\in\mathbf{Z}}|v(2\xi)|^2|m_0(\xi+\pi\alpha+\pi)|^2|\hat{\varphi}(\xi+\pi\alpha)|^2\\&=|v(\xi)|^2\Big(\sum_{\alpha偶}+\sum_{\alpha奇}\Big)\\&=|v(\xi)|^2(|m_0(\xi+\pi)|^2+|m_0(\xi)|^2),\end{aligned}$$

再由 $|m_0(\xi+\pi)|^2+|m_0(\xi)|^2=1$ 和(4.14)，导致 $|v(2\xi)|^2=1$.

在所有可能中取 $v(\xi)\equiv 1$，就有

$$m_1(\xi)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}\,\overline{m_0}(\xi+\pi).$$

由 $\hat{\psi}(\xi)=l_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$ 定义的 $\psi(x)$ 满足 $\psi(x)\in W_{-1}$ 且 $\{\sqrt{2}\,\psi(x-2k)\}_k$ 构成规范正交系.

现在断言 $\{\sqrt{2}\,\psi(x-2k)\}_k$ 生成 W_{-1}. 实际上，(4.11) 和(4.12) 对 $(W_{-1})^\wedge$ 作了描述. 对 $\hat{f}(\xi)\in(W_{-1})^\wedge$ 有

$$\hat{f}(\xi)=v(2\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}\,\overline{m_0}(\xi+\pi)\hat{\varphi}(\xi)=v(2\xi)\psi(\xi)\in L^2(\mathbf{R}).$$

由于(4.13) 和 $v(2\xi)$ 是周期为 π 的函数，导出结论.

再令 $\Psi(x)=2\psi(2x)$，$\hat{\Psi}(\xi)=m_1\left(\frac{\xi}{2}\right)\hat{\psi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$，则 $\Psi(x)$ 满足

(1) $\{\Psi(x-k)\}_k$ 是 W_0 的标准正交基;

(2) $\{2^{\frac{j}{2}}\Psi(2^jx-k)\}_k$ 是 W_j 的标准正交基.

再由 $\bigcup V_j$ 的稠密性得到定理结论.

下面研究高维小波基. 对于高维情况，我们也可以按上面的方式归结为一个 $2^n\times 2^n$ 酉矩阵，给定一行为 $\{m_0(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\nu}\pi)\}_{\nu\in\{0,1\}^n}$，求其他 2^n-1 行的问题. 但这里我们利用一维小波来生成高维小波.

用 $\Phi^0(x)$ 记一维小波的父小波，用 $\Phi^1(x)$ 记一维小波的母小波. 对于 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$ 和 $\boldsymbol{\epsilon}=(\epsilon_1,\epsilon_2,\cdots,\epsilon_n)\in\{0,1\}^n$，记

$$\Phi^{\epsilon}(\boldsymbol{x})=\prod_{i=1}^{n}\Phi^{\epsilon_i}(x_i).$$

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的酉矩阵. 记 $\Phi^{\epsilon}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x})=\Phi^{\epsilon}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})$. 对于任意的 $j\in\mathbf{Z}$，$\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n$，记 $\Phi^{\epsilon}_{\boldsymbol{A},j,\boldsymbol{k}}=2^{\frac{n}{2}j}\Phi^{\epsilon}(2^j\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{k})$. 令

$$\Gamma_n=\{(\boldsymbol{\epsilon},\boldsymbol{k}):\boldsymbol{\epsilon}\in\{0,1\}^n\backslash\{\mathbf{0}\},\ \boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n\},$$

$$\Lambda_n=\{(\boldsymbol{\epsilon},j,\boldsymbol{k}):\boldsymbol{\epsilon}\in\{0,1\}^n\backslash\{\mathbf{0}\},\ j\in\mathbf{Z},\ \boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n\}.$$

那么我们有

定理4.5 $\{\Phi^{\epsilon}_{A,j,k}\}_{(\epsilon,j,k)\in\Lambda_n}$ 是$L^2(\mathbf{R}^n)$的一组规范正交基.

证 首先注意到$\Phi^0_A(x)$的整平移生成某个V_0，而V_0的二进伸缩生成$L^2(\mathbf{R}^n)$的正交多分辨率分析. 记

$$W_0=V_1\ominus V_0.$$

然后注意到$\{\Phi^{\epsilon}_A(x-k)\}_{(\epsilon,k)\in\Gamma_n}$为$W_0$的一组规范正交基，这就得到所需结论. ■



习　　题

1. 给定

$$|\varphi(x)|\leqslant C_N(1+|x|)^{-N},\quad \forall N>0,$$

$$\int x^{\alpha}\varphi(x)\mathrm{d}x=0,\quad \forall 0\leqslant\alpha\leqslant m.$$

令$I\varphi(x)=I^1\varphi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(y)\mathrm{d}y$. $\forall s\geqslant 2$，令$I^s\varphi(x)=I(I^{s-1}\varphi)(x)$. 证明：

$$|I^s\varphi(x)|\leqslant C_N(1+|x|)^{-N},\quad \forall 1\leqslant s\leqslant m,\ N>0.$$

2. 给定$\varphi(x),\psi(x)\in S(\mathbf{R}^n)$，$\forall 0<p\leqslant\infty$，证明：

(1) $\|f*\psi(x)\|_p\leqslant C_p\|f\|_p$；

(2) $\left\|\sum_k f_k\varphi(x-k)\right\|_p\leqslant C_p\left(\sum_k|f_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

3. 对于$0<N<m$，给定两组m正则的小波基$\{\Phi^{1,\epsilon}_{j,k}\}_{(\epsilon,j,k)\in\Lambda}$和$\{\Phi^{2,\epsilon}_{j,k}\}_{(\epsilon,j,k)\in\Lambda}$. 记$a^{\epsilon,\epsilon'}_{j,k;j',k'}=\langle\Phi^{1,\epsilon}_{j,k},\Phi^{2,\epsilon}_{j,k}\rangle$. 证明：

$$|a^{\epsilon,\epsilon'}_{j,k;j',k'}|\leqslant C_N 2^{-|j-j'|(\frac{n}{2}+N)}\left(\frac{2^{-j}+2^{-j'}}{2^{-j}+2^{-j'}+|2^{-j}k-2^{-j'}k'|}\right)^{n+N}.$$

4. 在一维中给出一个正则的Fourier变换具有紧支集的正交小波$\psi(x)$，并证明：$\{2^{\frac{j}{2}}\psi(2^jx-k)\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$构成$L^2(\mathbf{R})$的正交基.

小波的进一步发展

小波构造的通用算法一般是从尺度方程和滤波函数出发先构造尺度函数，然后构造小波母函数. 连续小波变换是基于具有消失矩的“好函数”对其

他函数的分析的一种变换，对这种变换进行离散也可以得到某种小波框架.

小波发展到现在，对于二进小波，它的很多性质已经分析得很透彻了，比如正交基，双正交基，正交框架，双正交框架，小波包，对称性等. 几年前大家把目光对准了多分辨率中的 V_0 由多个函数组成，并且是非二进的情况；甚至破坏其伸缩性（比如脊小波）和小波的正则性以适应分析的分布空间中所处的状态等. 另外是考虑与具体的算子相匹配的多分辨率分析，在分布空间上的多分辨率分析，比如散度为 0 的小波等. 目前在欧式空间 $\mathbf{R}^n$ 上具有自相似性质小波构造的结果已经相当成熟.

还有一种趋势是在非欧氏空间上建立相应的结果，比如在 Heisenberg 群上，这将影响该方向的技巧的发展. 我们也可以研究 Heisenberg 群上的小波基，还可以研究变尺度的小波. 更进一步，人们抛开 V_j 不管，而是通过一组核 $E_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 来构造对偶小波框架，其中对于固定的 j，$E_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 对 $\boldsymbol{x}$ 在特定测度下积分为 1，对 $\boldsymbol{y}$ 在特定测度下积分也为 1. 由此可以考虑一些度量空间上函数空间的连续性.

总的说来，小波本身的构造已经相当成熟，但是小波在数学理论方面的应用以及在数学和其他学科的应用上还有很多工作可做. 小波在应用上的成功也是有目共睹的，及时把最新给出的小波结构在数学和其他学科的应用上进行推广而形成新的有效算法也是大家关心的事.



第五章　其他小波

上一章我们介绍了全空间 $\mathbf{R}^n$ 上由二进平移展缩生成的正交小波的一些知识，其实还可以考虑非正交的小波和多进制的小波、连续小波，甚至小波框架，但由于它们在处理技巧上都具有某种相似性，在本课程就不打算深入涉及. 这些都是在整个空间考虑的，而实际计算中我们只能考虑区域的情形. 因此，本章首先简单介绍一下区域的小波，更进一步的知识大家可以参见[39]或其他参考文献. 任意给定一个区域，除二进方体和Haar基外，前面介绍的全空间上的通常的小波基均不可能分成支集只属于区域内和只属于区域外两部分，必定有第三部分小波基，它的支集必定同时与区域内部和外部相交. 这样我们不得不针对区域的情况考虑特殊的小波基.

其次，在经典平移展缩小波形成理论前，人们使用加窗Fourier变换来改善 Fourier 变换没有局部性的问题，因此产生了很多的技巧. 在5.2节，我们将研究一个针对加窗 Fourier 变换进行了很多改进的特殊正交基——Marlvar 小波.

5.1　方体上的小波

前面已经介绍了在 $\mathbf{R}^n$ 上的小波，但是在实际生活中，我们碰到的对象可能只是 $\mathbf{R}^n$ 中的一部分，比如它中间的一个区域. 当我们给定一个区域时，正则的小波基除了有一部分基的支集全部在区域内，一部分基的支集全部在区域外以外，必然还有第三部分，它们的支集必然与区域内外两部分同时相交. Meyer 曾经提出一种方法来给出一般区域上的小波基，即支集在区域内的小波函数加上由 Gram-Schmidt 程序正交化的部分. 但对于小波基的这个由 Gram-Schmidt 程序正交化的部分，已经无法用与其他部分一样的方式由单个或固定数目的函数的平移与伸缩来生成. 不过方体的情况比较例外. 我们可用周期小波，它具有类似 $\mathbf{R}^n$ 情形的多分辨率分析的概念. 但除 Haar 小波外，基本上我们不能指望不同的 V_j 的生成函数由同一函数的伸缩构成. 对

于一般区域上的小波的研究与区域的几何结构有关，讨论起来相当复杂.

令

$$\mathbf{Z}_j^n=\{\boldsymbol{k}=(k_1,k_2,\cdots,k_n)\in \mathbf{Z}^n:\ \forall\, i=1,2,\cdots,n,\ 0\leqslant k_i\leqslant 2^j-1\}.$$

定义 5.1 $\{V_j^p\}_{j\geqslant 0}$ 称为一个 $L^2([0,1]^n)$ 上的**正交多分辨率分析**，如果 $\{V_j^p\}_{j\geqslant 0}$ 是 $L^2([0,1]^n)$ 上的一个闭子空间族，满足

① $\bigcup\limits_{j\geqslant 0}V_j^p$ 在 $L^2([0,1]^n)$ 上稠密；

② $V_0^p\subset V_1^p\subset\cdots\subset V_j^p\subset\cdots$；

③ $\dim V_j^p=2^{nj}$；

④ 存在 $\varphi_j(\boldsymbol{x})\in V_j^p$ 使得 $\{\varphi_j(\boldsymbol{x}-2^{-j}\boldsymbol{k})\}_{\boldsymbol{k}\in \mathbf{Z}_j^n}$ 能够构成 V_j^p 的标准正交基.

虽然定义 5.1 中的多分辨率分析可以不依赖于我们以前学过的多分辨率分析，能独立地给出，但最简单地给出其存在性的方式却是通过对已经有的多分辨率分析做周期化得到的.

给定 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 上的一个正则的正交多分辨率分析 $\{V_j\}_{j\geqslant 0}$，尺度函数为 $\Phi^0(\boldsymbol{x})$，小波为 $\{\Phi^{\epsilon}(\boldsymbol{x})\}_{\epsilon\in\{0,1\}^n\setminus\{0\}}$. 对于任意的 $j\geqslant 0$，$\boldsymbol{k}\in \mathbf{Z}_j^n$，$\epsilon\in\{0,1\}^n$，定义

$$\Phi_{j,k}^{\epsilon,p}(\boldsymbol{x})=\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in \mathbf{Z}^n}\Phi_{j,k}^{\epsilon}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\alpha}). \tag{5.1}$$

对于 $j\geqslant 0$，定义

$$V_j^p=\mathrm{span}(\{\Phi_{j,k}^{0,p}\}_{\boldsymbol{k}\in \mathbf{Z}_j^n}),\quad W_j^p=\mathrm{span}(\{\Phi_{j,k}^{\epsilon,p}\}_{\epsilon\in\{0,1\}^n\setminus\{0\},\ \boldsymbol{k}\in \mathbf{Z}_j^n}). \tag{5.2}$$

那么有

定理5.1 (i) 由(5.2)定义的 V_j^p 是 $L^2([0,1]^n)$ 上的正则正交的多分辨率分析.

(ii) $\{\Phi_{j,k}^{\epsilon,p}\}_{\epsilon\in\{0,1\}^n\setminus\{0\},\ j\geqslant 0,\ \boldsymbol{k}\in \mathbf{Z}_j^n}$ 在 $[0,1]^n$ 上的限制和 $[0,1]^n$ 上的特征函数一起构成 $L^2([0,1]^n)$ 上的标准正交基.

证 (i) $\{V_j^p\}_{j\geqslant 0}$ 是 $L^2([0,1]^n)$ 上的一个闭子空间族，满足定义 5.1 中的 ①,②,③ 是明显的. 下面证明 $\{\Phi_{j,k}^{0,p}\}_{\boldsymbol{k}\in \mathbf{Z}_j^n}$ 构成 V_j^p 的规范正交基.

$\forall\, f(\boldsymbol{x})\in L^1([0,1]^n)$，其 Fourier 变换定义为

$$\hat{f}(2\pi\boldsymbol{m})=\int_{[0,1]^n}f(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\boldsymbol{x}\boldsymbol{m}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

$\forall\, f,g\in L^2([0,1]^n)$，Fourier 逆转公式与 Parseval 公式分别为

$$f(x)=\sum_{m}\hat{f}(2\pi m)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi mx},$$

$$\langle f,g\rangle=\int_{[0,1]^n}f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x=\sum_{m}\hat{f}(2\pi m)\overline{\hat{g}(2\pi m)}.$$

对于 $k\in Z_j^n$，有

$$\int_{[0,1]^n}\Phi_{j,k}^{0,p}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi xm}\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^n}\Phi_{j,k}^{0}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi xm}\mathrm{d}x$$
$$=2^{-\frac{nj}{2}}\Phi^0(2\pi 2^{-j}m)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi 2^{-j}km}.$$

于是，对于 $k,l\in Z_j^n$，运用 Fourier 变换有

$$I_{j,k,l}=\int_{[0,1]^n}\Phi_{j,k}^{0,p}(x)\overline{\Phi_{j,l}^{0,p}(x)}\,\mathrm{d}x$$
$$=2^{-nj}\sum_{m\in Z^n}|\Phi^0(2\pi 2^{-j}m)|^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi 2^{-j}(k-l)m}.$$

对于任意的 $m\in Z^n$，必定存在唯一的 $\alpha\in Z^n$ 和 $\beta\in Z_j^n$，使得 $m=\beta+2^j\alpha$. 将此代入上式得到

$$I_{j,k,l}=2^{-nj}\sum_{\beta\in Z_j^n}\sum_{\alpha\in Z^n}|\Phi^0(2\pi\alpha+2\pi 2^{-j}\beta)|^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi 2^{-j}(k-l)\beta}.$$

注意到 $\sum\limits_{\alpha\in Z^n}|\Phi^0(2\pi\alpha+2\pi 2^{-j}\beta)|^2=1$，我们有

$$I_{j,k,l}=2^{-nj}\sum_{\beta\in Z_j^n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi 2^{-j}(k-l)\beta}=\delta_{0,k-l}.$$

这就证明了规范正交性 ④.

(ⅱ) 完全类似地可以证明 $\{\Phi_{j,k}^{\epsilon,p}\}_{\epsilon\in\{0,1\}^n\setminus\{0\},\,k\in Z_j^n}$ 在 $[0,1]^n$ 上的限制构成 $V_{j+1}^p\ominus V_j^p$ 上的标准正交基. 由此而得(ⅱ)的证明. ∎

周期小波不能分析函数在边界点的正则性，为了分析边界点的正则性，我们可以构造折叠小波. 考虑 $[0,1]$ 上的函数 $f(x)$，按如下方式延拓成 $\mathbf{R}$ 上的周期为 2 的偶函数：

$$F(x)=\begin{cases}f(2m-x), & 2m-1\leqslant x\leqslant 2m,\\ f(x-2m), & 2m\leqslant x\leqslant 2m+1.\end{cases}$$

然后利用周期小波来研究，或者如下写出周期为 2 的偶小波，即折叠小波：

$$\varphi_{0,k}^f(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{\alpha\in\mathbf{Z}}(\varphi_{0,k}(2\alpha-x)+\varphi_{0,k}(x-2\alpha)),\quad k=0,1,$$

$$\psi_{j,k}^f(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{\alpha\in\mathbf{Z}}(\psi_{j,k}(2\alpha-x)+\varphi_{j,k}(x-2\alpha)),\quad j\geqslant 0,\ 0\leqslant k<2^{j+1}$$

来研究.

5.2 Malvar 小波

经典平移展缩小波克服了只有频率局部性而没有时域局部性的缺点. 但 Fourier 分析远在小波诞生之前就产生了，并且工程师们也想过一些方法来补救，这就是窗口 Fourier 变换. 这种变换仍不能将 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 函数表示成正交的函数空间的直和. 在 1991 年 Coifman 和 Meyer 将此理论发展为局部正弦基和局部余弦基. 这些基像小波基一样是空间的固定基，他们称之为 **Malvar 小波**.

给定一个严格上升的序列 $a_j(j\in\mathbf{Z})$，使得当 $j\to\pm\infty$ 时有 $a_j\to\pm\infty$. 令 $I_j=[a_j,a_{j+1}]$，那么 I_j 构成 $\mathbf{R}$ 的一个划分. 令 $l_j=a_{j+1}-a_j$，给定 η_j 为满足如下关系的数列：$\eta_j+\eta_{j+1}\leqslant l_j$. 本节的主要定理是

定理 5.2 *存在一列 $C^\infty(\mathbf{R})$ 中的函数 $b_j(\xi)$ 满足关系*

$$\operatorname{supp} b_j(\xi)\subset[a_j-\eta_j,a_{j+1}-\eta_{j+1}],$$

并使得下面的函数族是 $L^2(\mathbf{R})$ 的一组标准正交基：

$$b_{j,m}(\xi)=\sqrt{\frac{2}{|I_j|}}\,b_j(\xi)\sin\frac{2m+1}{2}\frac{\pi}{|I_j|}(\xi-a_j),\quad j\in\mathbf{Z},\ m=0,1,\cdots.\tag{5.3}$$

在通常小波基的情况下，我们是通过滤波函数 $m_0(\xi)$ 和 $m_1(\xi)$ 之间的特殊关系将 $L^2(\mathbf{R})$ 分解成直和 $\bigoplus\limits_{j\in\mathbf{Z}}W_j$；证明定理 5.2 的基本想法是，利用区间 I_j 上的钟形函数 $b_j(\xi)$ 和带有极性的投影算子 P_{I_j} 将 $L^2(\mathbf{R})$ 变成直和 $\bigoplus\limits_{j\in\mathbf{Z}}P_{I_j}L^2(\mathbf{R})$. 我们将在本节最后来证明此定理.

首先介绍区间 $I=[\alpha,\beta]$ 上的钟形函数的定义.

定义 5.2 *对于满足 $\varepsilon+\varepsilon'<\beta-\alpha$ 的正数 ε,ε'，称 $b_{I,\varepsilon,\varepsilon'}$ 为 I 上的一个*钟形**函数***（在无须标明 $\varepsilon,\varepsilon',I$ 时，可简单记为 b_I 或 b），如果*

$$\operatorname{supp} b\subset[\alpha-\varepsilon,\beta+\varepsilon'],\tag{5.4}$$

$$b^2(\xi)+b^2(2\alpha-\xi)=1,\quad \forall\,\xi\in[\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon],\tag{5.5}$$

$$b(\xi)=1,\quad \forall\,\xi\in[\alpha+\varepsilon,\beta-\varepsilon'],\tag{5.6}$$

$$b^2(\xi)+b^2(2\beta-\xi)=1,\quad \forall\,\xi\in[\beta-\varepsilon',\beta+\varepsilon'].\tag{5.7}$$

无穷次可微的钟形函数的例子可如下构造. 设 $\tau(t)$ 是支集在区间$[-\varepsilon,\varepsilon]$

上的无穷次可微非负偶函数，使$\int\tau(t)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$. 令$\theta(\xi)=\int_{-\infty}^{\xi}\tau(t)\mathrm{d}t$，则$\theta(\xi)$是无穷次可微非负单调增加函数，满足

$$\theta(\xi)=0,\ \xi\leqslant-\varepsilon;\quad \theta(\xi)=\frac{\pi}{2},\ \xi\geqslant\varepsilon;\quad \theta(\xi)+\theta(-\xi)=\frac{\pi}{2}.$$

令$S_\varepsilon(\xi)=\sin\theta(\xi)$，$C_\varepsilon(\xi)=\cos\theta(\xi)$，以及

$$b(\xi)=b_I(\xi)=S_\varepsilon(\xi-\alpha)C_{\varepsilon'}(\xi-\beta),$$

可以逐条验证$b_I(\xi)$为钟形函数. 实际上，(5.4)和(5.6)是明显的. 对于(5.5)，注意到当$\xi\in[\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon]$时有

$$b_I(\xi)=S_\varepsilon(\xi-\alpha),\quad b_I(2\alpha-\xi)=S_\varepsilon(\alpha-\xi).$$

对于(5.7)，注意到当$\xi\in[\beta-\varepsilon',\beta+\varepsilon']$时有

$$b_I(\xi)=C_{\varepsilon'}(\xi-\beta),\quad b_I(2\beta-\xi)=C_{\varepsilon'}(\beta-\xi).$$

于是得到了钟形函数.

接下来，我们利用区间I_j上的钟形函数$b_j(\xi)$来定义投影算子. 为了让两个相邻的区间之间的钟形函数导致的投影算子之间正交，需要考虑钟形函数两端的极性. 令$\boldsymbol{\rho}=(\rho_1,\rho_2)\in\{-,+\}^2$. $L^2(\mathbf{R})$上的**带有极性$\boldsymbol{\rho}$的算子**$P_{I,\boldsymbol{\rho}}$(或简单记为P_I)的定义如下：$\forall f\in L^2$，

$$\begin{aligned}P_If(\xi)=&b_I^2(\xi)f(\xi)+\rho_1b_I(\xi)b_I(2\alpha-\xi)f(2\alpha-\xi)\\&+\rho_2b_I(\xi)b_I(2\beta-\xi)f(2\beta-\xi).\end{aligned}\tag{5.8}$$

定理5.3 P_I是正交投影算子，即$P_I^2=P_I$和$P_I^*=P_I$.

证 令$I_1=[\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon]$，$I_2=[\alpha+\varepsilon,\beta-\varepsilon']$，$I_3=[\beta-\varepsilon',\beta+\varepsilon']$，则$I=\bigcup_{i=1}^{3}I_i$. 将函数$f,g$分别限制在每一个区间$I_i(i=1,2,3)$上，得到$f^i,g^i$ $(i=1,2,3)$. 在每一个区间上验证如下两个等式：

$$\langle P_I^*f^i,g^i\rangle=\langle P_If^i,g^i\rangle,\quad P_I^2f^i=P_If^i.$$ ∎

下面证明投影空间P_IL^2存在无条件基. 为此记S_+为集合$\{0,1,2,\cdots\}$，记S_-为集合$\{1,2,\cdots\}$. $\forall\rho\in\{-,+\}$，$x\in\mathbf{R}$，$n\in S_\rho$，记

$$u_\rho(x)=\begin{cases}\sin x, & 如果\ \rho=-,\\ \cos x, & 如果\ \rho=+;\end{cases}$$

$$\rho(n)=\begin{cases}n, & 如果\ \rho=-,\\ \dfrac{2n+1}{2}, & 如果\ \rho=+.\end{cases}$$

对于任意的$\boldsymbol{\rho}=(\rho_1,\rho_2)\in\{+,-\}^2$，记

$$F_I^{\boldsymbol{\rho}} = F_{I,\varepsilon,\varepsilon'}^{\boldsymbol{\rho}} = \Big\{ S_{\boldsymbol{\rho}}(\xi) \in L^2(\mathbf{R}),\ \operatorname{supp} S_{\boldsymbol{\rho}}(\xi) \subset [\alpha-\varepsilon, \beta+\varepsilon'],\ \text{且}$$

$$S_{\boldsymbol{\rho}}(\xi) = \begin{cases} \rho_1 S(2\alpha-\xi), & \text{如果 } \xi \in [\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon], \\ \rho_2 S(2\beta-\xi), & \text{如果 } \xi \in [\beta-\varepsilon', \beta+\varepsilon']. \end{cases} \Big\}$$

实际上，我们利用 $F_I^{\boldsymbol{\rho}}$ 上的基来生成 $P_{I,\boldsymbol{\rho}}L^2(\mathbf{R})$ 上的基. 记 $\widetilde{F}_I^{\boldsymbol{\rho}} = \{b_I(\xi)S_{\boldsymbol{\rho}}(\xi):\ S_{\boldsymbol{\rho}}(\xi) \in F_I^{\boldsymbol{\rho}}\}$，那么有

定理5.4 （ⅰ） $P_{I,\boldsymbol{\rho}}L^2(\mathbf{R}) = \widetilde{F}_I^{\boldsymbol{\rho}}$.

（ⅱ） $P_{I,\boldsymbol{\rho}}L^2(\mathbf{R})$ 允许标准正交基：

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{|I|}}\, b_I(\xi) u_{\rho_1}\Big(\frac{\pi\rho_2(n)}{|I|}(\xi-\alpha)\Big) \right\}_{S_{\rho_2}}. \tag{5.9}$$

证 （ⅰ） 令 $\chi_{I,\varepsilon,\varepsilon'}(\xi)$ 为区间 $[\alpha-\varepsilon, \beta+\varepsilon']$ 上的特征函数. 对于任意函数 $g(\xi) \in L^2(\mathbf{R})$，令

$$\begin{aligned} S_{\boldsymbol{\rho}}(\xi) = {} & b_I(\xi)g(\xi) + \rho_1 b_I(2\alpha-\xi)g(2\alpha-\xi) \\ & + \rho_2 \chi_{I,\varepsilon,\varepsilon'}(\xi) b_I(2\beta-\xi) g(2\beta-\xi). \end{aligned}$$

通过验证 $S_{\boldsymbol{\rho}}(\xi)$ 在 $[\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon]$ 和 $[\beta-\varepsilon', \beta+\varepsilon']$ 上的性质，我们知道 $S_{\boldsymbol{\rho}}(\xi) \in F_I^{\boldsymbol{\rho}}$. 由于 $P_{I,\boldsymbol{\rho}}g(\xi) = b_I(\xi)S_{\boldsymbol{\rho}}(\xi)$，于是有

$$P_{I,\boldsymbol{\rho}}L^2(\mathbf{R}) \subset \widetilde{F}_I^{\boldsymbol{\rho}}.$$

若 $f(\xi) = b_I(\xi)S_{\boldsymbol{\rho}}(\xi) \in \widetilde{F}_I^{\boldsymbol{\rho}}$，则容易验证 $P_{I,\boldsymbol{\rho}}f(\xi) = f(\xi)$. 这就得到

$$\widetilde{F}_I^{\boldsymbol{\rho}} \subset P_{I,\boldsymbol{\rho}}L^2(\mathbf{R}).$$

因此，有 $P_{I,\boldsymbol{\rho}}L^2(\mathbf{R}) = \widetilde{F}_I^{\boldsymbol{\rho}}$.

（ⅱ） 很明显，(5.9) 中的函数是含于 $P_{I,\boldsymbol{\rho}}L^2(\mathbf{R})$ 的，下面分两步验证（ⅱ）. 首先验证(5.9) 中函数的正交性. $\forall n, n' \in S_{\rho_2}$，$n \neq n'$，有

$$\begin{aligned} & \int \sqrt{\frac{2}{|I|}}\, b_I(\xi) u_{\rho_1}\Big(\frac{\pi\rho_2(n)}{|I|}(\xi-\alpha)\Big) \sqrt{\frac{2}{|I|}}\, b_I(\xi) u_{\rho_1}\Big(\frac{\pi\rho_2(n)}{|I|}(\xi-\alpha)\Big) \mathrm{d}\xi \\ & = \int \frac{2}{|I|} b_I^2(\xi) u_{\rho_1}\Big(\frac{\pi\rho_2(n)}{|I|}(\xi-\alpha)\Big) u_{\rho_1}\Big(\frac{\pi\rho_2(n)}{|I|}(\xi-\alpha)\Big) \mathrm{d}\xi \\ & = \int_I \frac{2}{|I|} u_{\rho_1}\Big(\frac{\pi\rho_2(n)}{|I|}(\xi-\alpha)\Big) u_{\rho_1}\Big(\frac{\pi\rho_2(n)}{|I|}(\xi-\alpha)\Big) \mathrm{d}\xi \\ & = 0. \end{aligned}$$

于是，有

$$\sqrt{\frac{2}{|I|}}\,b_I(\xi)u_{\rho_1}\Big(\frac{\pi\rho_2(n)}{|I|}(\xi-\alpha)\Big)$$

和

$$\sqrt{\frac{2}{|I|}}\,b_I(\xi)u_{\rho_1}\Big(\frac{\pi\rho_2(n')}{|I|}(\xi-\alpha)\Big)$$

之间是相互正交的.

其次证明(5.9)中的函数系是一组基. 实际上，我们知道

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{|I|}}\,u_{\rho_1}\Big(\frac{\pi\rho_2(n)}{|I|}(\xi-\alpha)\Big)\right\}_{S_{\rho_2}}$$

可以构成 F_I^ρ 的标准正交基，于是，得出(5.9)中的函数系

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{|I|}}\,b_I(\xi)u_{\rho_1}\Big(\frac{\pi\rho_2(n)}{|I|}(\xi-\alpha)\Big)\right\}_{S_{\rho_2}}$$

构成 $\widetilde{F}_I^\rho$ 的基. ■

为了证明定理5.2，现在我们只需要相邻两区间对应的投影算子正交，从两个相邻的小区间上的投影算子出发，可以导出更大区间上的投影算子. 投影算子的正交性导致(5.9)中定义的基在相邻的区间情形正交. 实际上，相邻两区间对应的投影算子正交，是由钟形函数的相容性和极性的匹配来实现的.

定义5.3 两个相邻区间 $I=[\alpha,\beta]$，$J=[\beta,\gamma]$ 上的钟形函数 $b_{I,\varepsilon,\varepsilon'}$ 和 $b_{J,\varepsilon',\varepsilon''}$ 是**相容的**，如果 $\forall\xi\in[\beta-\varepsilon',\beta+\varepsilon']$ 有

$$b_I(\xi)=b_J(2\beta-\xi).$$

容易看出，$b_I(\xi)=S_\varepsilon(\xi-\alpha)C_{\varepsilon'}(\xi-\beta)$ 和 $b_J(\xi)=S_\varepsilon(\xi-\beta)C_{\varepsilon'}(\xi-\gamma)$ 就是两个相容的钟形函数.

从两个相容的钟形函数 $b_I(\xi),b_J(\xi)$ 出发，可以定义一个新的钟形函数:

$$b_{I\cup J}(\xi)=(b_I^2(\xi)+b_J^2(\xi))^{\frac{1}{2}}.$$

从 $b_{I\cup J}(\xi)$ 出发同样可以定义投影算子 $P_{I\cup J,\rho}$. 如果在 β 点的极性相反，我们还可以选择适当的极性使得 $P_{I\cup J,\rho}$ 为原来的两个投影算子之和.

定理5.5 如果 b_I 和 b_J 是两相容的钟形函数，其对应的投影算子在 β 点有相反的极性，那么 $P_IP_J=P_JP_I=0$.

证 记 $\rho_I=(\rho_1,\rho_2)$，$\rho_J=(\rho_3,\rho_4)$，以及 $\rho_{I\cup J}=(\rho_1,\rho_4)$，则根据定义容

易验证下面的结论：

$$P_{I,\rho_I}+P_{J,\rho_J}=P_{I\cup J,\,\rho_{I\cup J}}.$$

$P_{I\cup J,\,\rho_{I\cup J}}$ 为正交投影算子，$P_{I\cup J,\,\rho_{I\cup J}}L^2(\mathbf{R})$ 为 Hilbert 空间. 两个正交投影算子之和仍为正交投影算子就等价于 $P_IP_J=P_JP_I=0$. 实际上，

$$P_IP_J=(P_I+P_J)P_I-P_I^2=P_I-P_I=0.$$

类似地有 $P_JP_I=0$.

结合定理 5.4 和定理 5.5 就能得到定理 5.2 的结论.



习 题

1. 对于满足 $\varepsilon+\varepsilon'<\beta-\alpha$ 的正数 ε 和 ε'，称 $b=b_{I,\varepsilon,\varepsilon'}$ 为一个**钟形函数**，如果

(1) $\operatorname{supp} b\subset[\alpha-\varepsilon,\beta+\varepsilon']$；

(2) $b^2(\xi)+b^2(2\alpha-\xi)=1$，$\forall\xi\in[\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon]$；

(3) $b(\xi)=1$，$\forall\xi\in[\alpha+\varepsilon,\beta-\varepsilon']$；

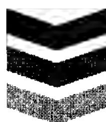
(4) $b^2(\xi)+b^2(2\beta-\xi)=1$，$\forall\xi\in[\beta-\varepsilon',\beta+\varepsilon']$.

举一个钟形函数的例子，并证明它确实满足以上 4 个条件.

2. 试比较 Meyer 小波的 Fourier 变换与钟形函数的相似处.

关于基的一点说明

我们对于 $\mathbf{R}^n$ 上的通常意义的基已经研究得比较透彻，但对于其他的区域或非欧氏空间，比如群等，还有很多机理不太明白. 比如说 Heisenberg 群，它同时来源于多复变函数和量子力学，也有学者将其用到图像处理. 它上面函数的 Fourier 变换是用一组算子定义的，因此人们对其上的小波感兴趣. 另外，在许多实际问题的处理中产生了许多与 Littlewood-Paley 分解无关的函数空间，比如 Herz空间等；在算子研究中出现的特殊的分布空间需要变尺度的小波，通常的小波难以与之匹配. 这些与 Littlewood-Paley 分解无关的分布空间具有特殊的结构，其上的基的研究应该有一些问题可做. 我们没有必要拘泥于基的形式，而应该去寻找适应问题研究的合适基.



第六章　小波的几个应用

前面我们讲述了一些小波的理论背景，主要是实分析及调和分析的准备知识，阐述了函数逼近与小波中的多分辨率分析的一些关系．然后介绍了小波结构本身的一些核心理论：平移展缩小波和局部正(余)弦基．本章我们讲述基于多分辨率分析的小波在应用上的理论基础，以及它在应用上的几个具体特例.

我们把不稳定的矩阵(比如，邱森在《线性代数探究性课题精编》一书中提到的工程中常用的 Hilbert 矩阵，用通常的方法计算这个矩阵不稳定，并且计算量很大)用有限带宽的矩阵来代替，这样，我们的计算不但是稳定的，而且计算量大为减少，这就是 Beylkin，Coifman 和 Rokhlin 提出的著名的 BCR 算法．鉴于严格的数学叙述需要很多算子理论的背景，我们这里就不涉及．鉴于国内有小波著作对这种有限带宽矩阵的逼近定理介绍不够严谨，这里特别指明一下，只有在反对称的矩阵用有限带宽矩阵逼近时，有可能不在矩阵对角线上加一个小的修正量而仍能保持原来矩阵的连续性，其他类型的矩阵则必须在对角线或其周围加以小的修正量，参见文献[45]．关于小波在信号处理和图像处理方面的内容几乎可以在所有的小波书中见到，其中详细讲述这两方面内容的有[20]和[82]，本章也不打算谈及．本章首先讲述一下建立数学与应用之间的最基本的小波原理：金字塔算法和光滑处小波系数衰减很快，然后介绍小波在数学理论上的一个应用，最后介绍小波在神经网络和水印这两个方面的应用．小波的应用非常广泛，但在实际应用中，除了具体的应用背景不同外，其处理方式和数学原理很多是相似的.

6.1　金字塔算法

小波在应用上得到广泛推崇的一个首要原因是，它提供了应用上一些算法的严格数学基础，这就是金字塔算法．本节介绍金字塔算法的原理，同时包括数据的编码和解码.

在 20 世纪 80 年代，一些工程师们(如 Esteban，Galand，Smith，Barnwell，Burt，Adelson 等)在对语音和图像数据进行处理时，发现存在一些问题，比如数据过大(特别是在传输时)，有噪音和灰色图像等. 于是他们采用了一种新的编码技术和一种新的快速算法 —— 金字塔算法. 在实验室里，他们发现这种算法能够较好地解决一些所遇到的困难，但他们无法从数学理论上来阐述其算法的有效性. 1987 年，Mallat 和 Meyer 将此发展成多分辨率分析.

首先介绍其编码过程，只看一维情形，它是来源于电气工程中的子带编码方法. 设$\{g_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$和$\{h_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$是$l^1(\mathbf{Z})$中的两个序列，$\boldsymbol{c}^{(0)}=\{c_k^{(0)}\}_{k\in\mathbf{Z}}$是原始资料序列，通常要求$\boldsymbol{c}^{(0)}\in l^2(\mathbf{Z})$. 我们考虑两个序列的卷积运算：

$$(a*b)_k=\sum_l a_l b_{k-l}.$$

从电气工程的观点看，一个反映某个时间不变系统特性的序列与一个代表某个信号的序列的卷积可以理解成该系统对那个信号作了一次滤波. 这可如下看出：设$\sum\limits_l b_l \mathrm{e}^{\mathrm{i}lx}$是一个周期输入信号，$\sum\limits_l a_l \mathrm{e}^{\mathrm{i}lx}$是该系统的特性函数(即当输入为 δ- 序列时的输出)，则输出信号为

$$\sum_l\Big(\sum_k a_k b_{l-k}\Big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}lx}=\sum_l a_l\mathrm{e}^{\mathrm{i}lx}\sum_k b_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}.$$

乘法因子$\sum\limits_l a_l\mathrm{e}^{\mathrm{i}lx}$的物理意义是滤波. 给定的$\{g_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$和$\{h_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$代表两个滤波器，我们要考虑如下两个滤波过程：一个是半滤波，记为 2↓；一个是倍滤波，记为 2↑. 半滤波是

$$c_k^{(-1)}=\sqrt{2}\sum_l\overline{h_{l-2k}}c_l^{(0)},\quad d_k^{(-1)}=\sqrt{2}\sum_l\overline{g_{l-2k}}c_l^{(0)}.\tag{6.1}$$

之所以称之为半滤波是因为全滤波应是$\sum\limits_l\overline{h_{l-k}}c_l^{(0)}$(我们忽略卷积$\sum\limits_l\overline{h_{k-l}}c_l^{(0)}$和$\sum\limits_l\overline{h_{l-k}}c_l^{(0)}$之间的非本质差别)，半滤波相当于只留下了卷积运算以后由偶指针构成的子序列. 引进无穷矩阵，令$\boldsymbol{H}=(\sqrt{2}\,h_{l-2k})_{l,k}$和$\boldsymbol{G}=(\sqrt{2}\,g_{l-2k})_{l,k}$. 按通常的约定，用 * 表示矩阵的共轭转置，则(6.1)可以改写为

$$\boldsymbol{c}^{-1}=\boldsymbol{H}^*\boldsymbol{c}^{(0)},\quad \boldsymbol{d}^{-1}=\boldsymbol{G}^*\boldsymbol{c}^{(0)}.\tag{6.2}$$

通常矩阵$\boldsymbol{H}$对应的滤波是低频滤波，矩阵$\boldsymbol{G}$对应的滤波是高频滤波；矩阵$\boldsymbol{H}$对应的是一个平均操作数，矩阵$\boldsymbol{G}$对应的是一个差操作数. 直观上看，恒为1的常序列$\boldsymbol{c}^{(0)}$(物理上是指存在充分大的N使得$c_k^{(0)}=1$，$\forall\,|k|\leqslant N$和$c_k^{(0)}=0$，$\forall\,|k|>N$)被$\boldsymbol{H}$和$\boldsymbol{G}$作用后分别为常序列和零序列，因而需要加上自然

的条件：

$$\sqrt{2}\sum_{l}h_{l}=1 \quad 和 \quad \sqrt{2}\sum_{l}g_{l}=0.$$

上述过程称为资料序列的**分解过程**，它把资料在两个子频带(即低频和高频两个频带)进行滤波. 下面考虑资料序列的重构过程. 令

$$\tilde{c}_{k}^{(0)}=\sqrt{2}\left(h_{k-2l}c_{l}^{(-1)}+g_{k-2l}d_{l}^{(-1)}\right), \tag{6.3}$$

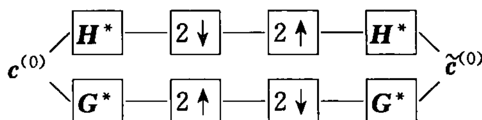
这里的滤波也不是全滤波，而是倍滤波，即先把序列$\{c_{l}^{(-1)}\}$（类似地，$\{d_{l}^{(-1)}\}$）扩充成序列$\{e_{l}\}$，其中

$$e_{2l+1}=0,\ e_{2l}=c_{l}^{(-1)}, \quad \forall\, l;$$

然后把它与$\{\sqrt{2}\,h_{k}\}$（类似地，$\{\sqrt{2}\,g_{k}\}$）作通常的卷积，(6.3)的矩阵写法是

$$\tilde{\boldsymbol{c}}^{(0)}=(\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{*}+\boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^{*})\boldsymbol{c}^{(0)}. \tag{6.4}$$

上述在两频段进行的数据序列的分解与重构过程就是所谓的子带编码过程，它可用图解释如下：

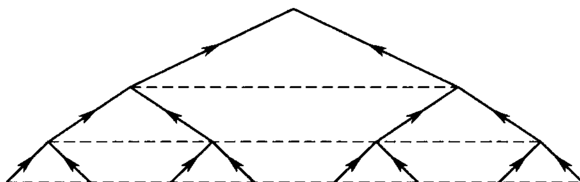


当$\tilde{\boldsymbol{c}}^{(0)}=\boldsymbol{c}^{(0)}$时，该过程可精确分解与重构. 由(6.4)知，能够精确重构当且仅当$\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{*}+\boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^{*}=\boldsymbol{I}$，即

$$2\Big(\sum_{m}h_{k-2m}\overline{h_{l-2m}}+\sum_{m}g_{k-2m}\overline{g_{l-2m}}\Big)=\delta_{k,l}. \tag{6.5}$$

再介绍其快速算法. 在小波的理论体系未形成前，人们就用Haar基来做这一过程，下面以此为例来看它的快速算法. 如果使用其他紧支集的小波，这一过程要稍微复杂一些，相应的图表也复杂一些.

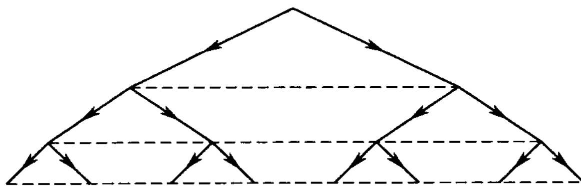
我们把较细层次上的资料利用(6.1)进行一次滤波，并记录下相应的数据资料. 而后在这一层次上再次利用(6.1)进行一次滤波，并记录下相应的资料. 反复若干次，这一过程的流程图似如下的金字塔图形：



从较粗的层次，利用(6.3)可以回复稍细层次上的数据；然后在此基础上再利用(6.3)，反复数次，直到回复到较细层次上的数据. 得到的图形是倒

置的金字塔图形：



工程师们发现，如果在一点附近的数据光滑，那么在滤波过程中数据很快趋于0，可用0替代；并且分析和恢复算法均较为成功. 下面我们从理论上来说明这一点.

首先说明数据的编码和解码过程. 约定下面空间中的函数是指相应的基底对应的分量. 实际上，从多分辨率分析的观点看，(6.1) 相当于将 V_1 中的一个函数分解成 V_0 与 W_0 的两个函数之和；而(6.3) 就是将 V_0 与 W_0 的两个函数合成为 V_1 中的一个函数. 金字塔算法的分解过程相当于将 V_j 中的数据投影到 $V_0, W_0, \cdots, W_{j-1}$ 中的过程，回复到较细层次的过程相当于从分量在 $V_0, W_0, \cdots, W_{j-1}$ 中的数据恢复到 V_j 的过程. 由于小波能够反映数据的光滑性程度，光滑的地方数据快速趋于0，这样就能有效地对数据进行处理.

其次说明如果在一点附近的数据光滑，那么在滤波过程中数据很快趋于0；这即是证明在一点处小波系数的衰减性. 对于 $0<\alpha<1$，我们说 $f(x)\in \mathrm{Lip}_{x_0}\alpha$ 是指存在 x_0 的邻域 V_{x_0}，使得

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant C|x-x_0|^{\alpha},\quad \forall x\in V_{x_0}. \tag{6.6}$$

我们有

定理6.1 给定 $0<\alpha<1$，有

（ⅰ）设 $f(x)\in \mathrm{Lip}_{x_0}\alpha$，则存在正常数 C_1 和正常数 C_2 使得 $f(x)$ 的小波系数 $f_{j,k}^{\epsilon}=\langle f(x),\Phi_{j,k}^{\epsilon}(x)\rangle$ 满足

$$|f_{j,k}^{\epsilon}|\leqslant C2^{-j(\alpha+\frac{n}{2})},\quad \forall j\geqslant C_1,\ |x_0-2^{-j}k|\leqslant C_2; \tag{6.7}$$

（ⅱ）反过来，若 $f(x)$ 的小波系数满足(6.7)，那么 $f(x)\in \mathrm{Lip}_{x_0}\alpha$.

证 （ⅰ）(6.7) 中常数 C_1, C_2 的选定使得 $\mathrm{supp}\,\Phi_{j,k}^{\epsilon}(x)\subset V_{x_0}$. 由 $\Phi_{j,k}^{\epsilon}(x)$ 的消失矩性质，有

$$f_{j,k}^{\epsilon}=\langle f(x)-f(x_0),\Phi_{j,k}^{\epsilon}(x)\rangle.$$

取绝对值并运用(6.6) 即得到(6.7).

（ⅱ） 反过来，模掉一个充分光滑的函数，在 x_0 的邻域 V_{x_0} 上函数 $f(x)$ 可以表示成

$$\tilde{f}(x) = \sum_{j \geqslant C_1,\ |x_0 - 2^{-j}k| \leqslant C_2} f_{j,k}^{\epsilon} \Phi_{j,k}^{\epsilon}(x).$$

令 j_0 为满足 $2^{-j_0} \leqslant |x - x_0| < 2^{1-j_0}$ 的整数. 根据 j 的不同，按 $j > j_0$ 和 $C_1 \leqslant j \leqslant j_0$ 把 $\tilde{f}(x)$ 分解成两部分：

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}_1(x) + \tilde{f}_2(x).$$

对 $\tilde{f}_1(x)$ 运用(6.7)，对 $\tilde{f}_2(x)$ 运用小波自身的光滑性质. ∎

总之，小波的编码是把一个没有分层的数据转化成多个层次的数据，且能够反映数据的光滑性. 其实，一个图像不光滑的地方往往是边边角角，这些地方比光滑的地方少；光滑的地方在用小波处理时，系数很快接近于0，很多时候就用0来代替. 于是，本来数据量很大的模拟图像数据就被数据量极少的数字图像数据所代替. 正是这些处理，我们现在的可视电话、数字电视才得以实现. 另外，小波本身的结构具有自相似性，比如我们看到的漂亮的花，就是分形图像，它是由一些自相似的简单几何结构叠加生成的，小波的自相似就可以用来在电脑上轻易画出漂亮的花. 在具体应用中，正是针对了小波的种种特性而总结出许多技巧，从而使小波在众多领域得到应用. 比如数据的压缩和除噪，图像和信号的处理，地震波的分析，多层有规律分形对象的形成，多种方法的密码加密，边缘的探测，电子地图的制作等. 小波从理论上重新解说了大量的已经存在的各种数值算法，并从理论上提供了这些算法为什么成功的原因，为我们提供了一种全新的理解方法.

在理论上，小波结构相对于 Littlewood-Paley 分解有无可比拟的优越性，它把函数直接变成“好函数”的线性叠加. Meyer 在他的《小波与算子》一书中写到，微分和积分在小波基下几乎对应着对角化的矩阵，因而某种程度上可以把小波基看成它们的特征函数，而且有很多刻画具体算子的特殊小波基等. 小波提供了大量的调和分析的实方法，使得小波在函数空间和算子空间等现代分析的核心问题上具有特别的发言权. 其应用渗透于很多领域，比如微分方程，变分法，概率统计，逆问题，群论等.

6.2 Besov 空间

现代分析的严格基础是建立在分布理论之上的. 为了更好地研究分布对象，Peetre 和 Triebel 利用 Littlewood-Paley 分析将大多数的函数空间分类成

Besov空间和Triebel-Lizorkin空间. Triebel-Lizorkin空间包含了Sobolev空间，当然也就包含了其特例Lebesgue空间 L^p，但这类空间的处理需要更多的实技巧，这里就不介绍了. 我们只介绍Besov空间，它包含了 L^2 空间，Hölder空间，Zygmund空间，Beurling代数，单峰代数，特殊原子生成的空间，Bloch空间等；但不包含 $L^p(p\neq 2)$. 为了研究函数空间中性质可能不好的分布，Littlewood-Paley分析将之转化为研究一列好性质的函数 f_j；这是小波出现前分析分布的方法. 这样的一列函数不一定属于具体的函数空间，而在应用上不能表示成固定空间中的函数就不能用有限元方法进行数值计算；小波的出现改变了这一状况，它把分布表示成一些"好函数"的线性组合，它的范数只与这些组合系数的绝对值有关，而对分布的任何运算都将转化成对这些"好函数"的运算.

Littlewood-Paley分析是利用 $\mathbf{R}^n$ 上的一个函数族 $\{\psi_v\}_{v\in\mathbf{Z}}$ 来进行的. 存在 C_1, C_2 满足 $\frac{1}{2}<C_1<C_2<2$，使得 ψ_v 满足如下的条件：

(i) $\psi_v\in S(\mathbf{R}^n)$；

(ii) $\operatorname{supp}\hat{\psi}_v\subset\left\{\xi\in\mathbf{R}^n: \frac{1}{2}\leqslant 2^{-v}|\xi|\leqslant 2\right\}$；

(iii) 当 $C_1\leqslant 2^{-v}|\xi|\leqslant C_2$ 时，$|\hat{\psi}_v(\xi)|\geqslant C>0$；

(iv) $|\partial^{\alpha}\hat{\psi}_v(\xi)|\leqslant C_{\alpha}2^{-v|\alpha|}$，$\forall\alpha\in\mathbf{N}^n$；

(v) $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}\hat{\psi}_v(\xi)=1$.

对于任意的分布 $f\in S'/P(\mathbf{R}^n)$，定义 $f_v=F^{-1}(\hat{\psi}_v\hat{f})$，于是，从形式上有 $f=\sum\limits_{v=-\infty}^{\infty}f_v$. Besov空间的定义由定义3.4给出.

不同的Littlewood-Paley分析之间的Fourier变换的支集在环线上，这使得所定义的函数空间不变. 对于小波，除Meyer小波外，不具有这一性质，不过不同的正则小波基之间相差一个几乎对角化的矩阵，由此我们可以得到小波刻画的不变性. 对于两组小波基 $\{\Phi^{1;\epsilon}_{j,k}\}_{(\epsilon,j,k)\in\Lambda}$ 和 $\{\Phi^{2;\epsilon}_{j,k}\}_{(\epsilon,j,k)\in\Lambda}$，记

$$a^{\epsilon,\epsilon'}_{j,k;j',k'}=\langle\Phi^{1;\epsilon}_{j,k},\Phi^{2;\epsilon'}_{j',k'}\rangle,$$

则 $\{a^{\epsilon,\epsilon'}_{j,k;j',k'}\}_{(\epsilon,j,k;\epsilon',j',k')\in\Lambda\times\Lambda}$ 是两组基相差的矩阵，它满足下面的几乎对角化的估计：

引理6.1

$$|a^{\epsilon,\epsilon'}_{j,k;j',k'}|\leqslant C_N 2^{-|j-j'|(\frac{n}{2}+N)}\left(\frac{2^{-j}+2^{-j'}}{2^{-j}+2^{-j'}+|2^{-j}k-2^{-j'}k'|}\right)^{n+N}.$$

注释 引理6.1估计式中的因子$2^{-|j-j'|(\frac{n}{2}+N)}$是由小波的消失矩性质和光滑性得到的；估计式中的因子$\left(\frac{2^{-j}+2^{-j'}}{2^{-j}+2^{-j'}+|2^{-j}k-2^{-j'}k'|}\right)^{n+N}$是由小波的快速衰减性得到的.

证 由于对称性，我们只考虑$j\geqslant j'$的情况. 对于$\epsilon\neq 0$，记i_ϵ为使$\epsilon_i\neq 0$的最小指标. 对于$x\in \mathbf{R}^n$，记$y_0=x_{i_\epsilon}$. $\forall N\geqslant 1$，记x_N^ϵ是第i_ϵ个指标为y_N，其余指标仍为x的相应坐标分量的向量. $\forall \Phi(x)$，记

$$I_N^\epsilon\Phi(x)=(-1)^N\int_{-\infty}^{x_{i_\epsilon}}\cdots\int_{-\infty}^{y_{N-1}}\Phi(x_N^\epsilon)\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_N,$$

记$\mathrm{D}_N^\epsilon\Phi(x)$为对$\Phi(x)$的第$i_\epsilon$个变量微分$N$次所得的函数. 于是，有

$$\begin{aligned}a_{j,k;j',k'}^{\epsilon,\epsilon'}&=2^{\frac{n}{2}(j'-j)}\langle\Phi^{1,\epsilon}(x),\Phi^{2,\epsilon'}(2^{j'-j}x-k'+2^{j'-j}k)\rangle\\&=2^{(\gamma+\frac{n}{2})(j'-j)}\langle I_\gamma^\epsilon\Phi^{1,\epsilon}(x),(\mathrm{D}_\gamma^\epsilon\Phi^{2,\epsilon'})(2^{j'-j}x-k'+2^{j'-j}k)\rangle\\&=b_{j-j',k-2^{j-j'}k'}^{\epsilon,\epsilon'}.\end{aligned}$$

根据小波的光滑性和消失矩性质，积分和微分后的函数$I_\gamma^\epsilon\Phi^{1,\epsilon}(x)$和$\mathrm{D}_\gamma^\epsilon\Phi^{2,\epsilon'}(x)$仍具有强衰减性，有

$$|a_{j,k;j',k'}^{\epsilon,\epsilon'}|\leqslant C\int(1+|x|)^{-N_1}(1+|2^{j'-j}x-k'+2^{j'-j}k|)^{-N_2}\mathrm{d}x.$$

将积分区域分成$|x|\leqslant 2^{j-j'-1}|k'-2^{j'-j}k|$和$|x|>2^{j-j'-1}|k'-2^{j'-j}k|$两部分，得到

$$\begin{aligned}|a_{j,k;j',k'}^{\epsilon,\epsilon'}|\leqslant{}&C\int_{|x|\leqslant 2^{j-j'-1}|k'-2^{j'-j}k|}(1+|x|)^{-N_1}(1+|k'+2^{j'-j}k|)^{-N_2}\mathrm{d}x\\&+C\int_{|x|>2^{j-j'-1}|k'-2^{j'-j}k|}(1+|x|)^{-N_1}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

取$N_1>N+n$和$N_2>N+n$，就得到所需结论. ∎

用小波来分析分布的理论基础是：对于任意分布$f(x)\in S'/P(\mathbf{R}^n)$，由分布的缓增性质，我们总可以选择正则的小波，以便可以定义$f_{j,k}^\epsilon$:

$$f_{j,k}^\epsilon=\langle f,\Phi_{j,k}^\epsilon\rangle,\quad \forall(\epsilon,j,k)\in\Lambda. \tag{6.8}$$

从$f_{j,k}^\epsilon$可以很方便地恢复$f(x)$，事实上在分布意义下有

$$f(x)=\sum_{(\epsilon,j,k)\in\Lambda}f_{j,k}^\epsilon\Phi_{j,k}^\epsilon(x). \tag{6.9}$$

下面用小波来研究Besov空间中的函数，我们使用来源于多分辨率分析的充分正则的正交张量积小波基，其中$\Phi^0(x)$为父小波，$\Phi^\epsilon(x)$，$\epsilon\in\{0,1\}^n\backslash\{0\}$是母小波. 令

$$\Lambda=\Lambda_n=\{\lambda=(\epsilon,j,k):\epsilon\in\{0,1\}^n\backslash\{0\},\ j\in\mathbf{Z},\ k\in\mathbf{Z}^n\}.$$

对于任意的ϵ, j, k，记

$$\Phi_{j,k}^{\epsilon}(x)=2^{\frac{jn}{2}}\Phi^{\epsilon}(2^{j}x-k).$$

运用(6.8)和(6.9)，则可以用正则小波分析 Besov 空间：

定理6.2　给定 $s\in\mathbf{R}$, $0<p,q\leqslant\infty$. 那么 $f(x)\in\dot{B}_{p}^{s,q}(\mathbf{R}^{n})$ 等价于

$$\left[\sum_{j\in\mathbf{Z}}2^{jq(s+\frac{n}{2}-\frac{n}{p})}\left(\sum_{\epsilon,k}|f_{j,k}^{\epsilon}|^{p}\right)^{\frac{q}{p}}\right]^{\frac{1}{q}}<\infty.$$

定理 6.2 的证明分两步完成. 首先证明 Meyer 小波使定理 6.2 成立，其次证明对于不同的小波基小波系数的估计不变.

证　第一步：Meyer 小波.

给定函数系$\{\psi_{v}\}_{v\in\mathbf{Z}}$和 Meyer 小波基$\{\Phi_{j,k}^{\epsilon}\}_{(\epsilon,j,k)\in\Lambda}$，于是对于 $f\in S'/P(\mathbf{R}^{n})$，相应地对应$\{f_{v}\}_{v\in\mathbf{Z}}$和$\{f_{j,k}^{\epsilon}\}_{(\epsilon,j,k)\in\Lambda}$. 因此，有

$$\begin{aligned}I&=\left[\sum_{v\in\mathbf{Z}}(2^{vs}\|f_{v}\|_{p})^{q}\right]^{\frac{1}{q}}=\left[\sum_{v\in\mathbf{Z}}(2^{vs}\|f*\psi_{v}\|_{p})^{q}\right]^{\frac{1}{q}}\\&=\left[\sum_{v\in\mathbf{Z}}\left(2^{vs}\left\|\sum_{\epsilon,j,k}f_{j,k}^{\epsilon}\Phi_{j,k}^{\epsilon}*\psi_{v}\right\|_{p}\right)^{q}\right]^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

由 $\Phi_{j,k}^{\epsilon}*\psi_{v}$ 的 Fourier 变换的支集性质，知道存在不依赖函数组选择的正整数 C，使得如果$|v-j|>C$，那么 $\Phi_{j,k}^{\epsilon}*\psi_{v}=0$. 于是，有

$$\begin{aligned}I&=\left[\sum_{v\in\mathbf{Z}}\left(2^{vs}\left\|\sum_{|j-v|\leqslant C}\sum_{\epsilon,k}f_{j,k}^{\epsilon}\Phi_{j,k}^{\epsilon}*\psi_{v}\right\|_{p}\right)^{q}\right]^{\frac{1}{q}}\\&\leqslant\left[\sum_{v\in\mathbf{Z}}\left(2^{vs}\sum_{|j-v|\leqslant C}\left\|\sum_{\epsilon,k}f_{j,k}^{\epsilon}\Phi_{j,k}^{\epsilon}*\psi_{v}\right\|_{p}\right)^{q}\right]^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

由于

$$\left\|\sum_{\epsilon,k}f_{j,k}^{\epsilon}\Phi_{j,k}^{\epsilon}*\psi_{v}\right\|_{p}\leqslant C\left\|\sum_{\epsilon,k}f_{j,k}^{\epsilon}\Phi_{j,k}^{\epsilon}\right\|_{p}\leqslant\left(\sum_{\epsilon,k}2^{nj(\frac{p}{2}-1)}|f_{j,k}^{\epsilon}|^{p}\right)^{\frac{1}{p}},$$

可得

$$\begin{aligned}I&\leqslant C\left[\sum_{v\in\mathbf{Z}}\left(2^{vs}\sum_{|j-v|\leqslant C}\sum_{\epsilon,k}2^{nj(\frac{p}{2}-1)}|f_{j,k}^{\epsilon}|^{p}\right)^{\frac{q}{p}}\right]^{\frac{1}{q}}\\&\leqslant C\left[\sum_{v\in\mathbf{Z},\ |j-v|\leqslant C}\left(2^{vs}\sum_{\epsilon,k}2^{nj(\frac{p}{2}-1)}|f_{j,k}^{\epsilon}|^{p}\right)^{\frac{q}{p}}\right]^{\frac{1}{q}}\\&\leqslant C\left[\sum_{v\in\mathbf{Z},\ |j-v|\leqslant C}\left(2^{js}\sum_{\epsilon,k}2^{nj(\frac{p}{2}-1)}|f_{j,k}^{\epsilon}|^{p}\right)^{\frac{q}{p}}\right]^{\frac{1}{q}}\\&\leqslant C\left[\sum_{j\in\mathbf{Z}}2^{jq(s+\frac{n}{2}-\frac{n}{p})}\left(\sum_{\epsilon,k}|f_{j,k}^{\epsilon}|^{p}\right)^{\frac{q}{p}}\right]^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

反过来，我们有

$$J=\Big[\sum_{j\in\mathbf{Z}}2^{jq(s+\frac{n}{2}-\frac{n}{p})}\Big(\sum_{\epsilon,k}|f_{j,k}^{\epsilon}|^{p}\Big)^{\frac{q}{p}}\Big]^{\frac{1}{q}}$$
$$=\Big[\sum_{j\in\mathbf{Z}}2^{jq(s+\frac{n}{2}-\frac{n}{p})}\Big(\sum_{\epsilon,k}|\langle f,\Phi_{j,k}^{\epsilon}\rangle|^{p}\Big)^{\frac{q}{p}}\Big]^{\frac{1}{q}}$$
$$=\Big[\sum_{j\in\mathbf{Z}}2^{jq(s+\frac{n}{2}-\frac{n}{p})}\Big(\sum_{\epsilon,k}\Big|\langle\sum_{v}f*\psi_v,\Phi_{j,k}^{\epsilon}\rangle\Big|^{p}\Big)^{\frac{q}{p}}\Big]^{\frac{1}{q}}$$
$$=\Big[\sum_{j\in\mathbf{Z}}2^{jq(s+\frac{n}{2}-\frac{n}{p})}\Big(\sum_{\epsilon,k}\Big|\sum_{v}\langle f*\psi_v,\Phi_{j,k}^{\epsilon}\rangle\Big|^{p}\Big)^{\frac{q}{p}}\Big]^{\frac{1}{q}}.$$

由 $\Phi_{j,k}^{\epsilon}$ 和 $f*\psi_v$ 的Fourier变换的支集和Parsevel等式性质，知道存在不依赖函数组选择的正整数 C，使得如果 $|v-j|>C$，那么 $\langle f*\psi_v,\Phi_{j,k}^{\epsilon}\rangle=0$. 于是，有

$$J=\Big[\sum_{j\in\mathbf{Z}}2^{jq(s+\frac{n}{2}-\frac{n}{p})}\Big(\sum_{\epsilon,k}\Big|\sum_{|v-j|\leqslant C}\langle f*\psi_v,\Phi_{j,k}^{\epsilon}\rangle\Big|^{p}\Big)^{\frac{q}{p}}\Big]^{\frac{1}{q}}$$
$$\leqslant C\Big[\sum_{j\in\mathbf{Z}}2^{jq(s+\frac{n}{2}-\frac{n}{p})}\Big(\sum_{|v-j|\leqslant C}\sum_{\epsilon,k}|\langle f*\psi_v,\Phi_{j,k}^{\epsilon}\rangle|^{p}\Big)^{\frac{q}{p}}\Big]^{\frac{1}{q}}$$
$$\leqslant C\Big[\sum_{j\in\mathbf{Z}}\sum_{|v-j|\leqslant C}2^{jq(s+\frac{n}{2}-\frac{n}{p})}\Big(\sum_{\epsilon,k}|\langle f*\psi_v,\Phi_{j,k}^{\epsilon}\rangle|^{p}\Big)^{\frac{q}{p}}\Big]^{\frac{1}{q}}.$$

由于

$$\Big(\sum_{\epsilon,k}|\langle f*\psi_v,\Phi_{j,k}^{\epsilon}\rangle|^{p}\Big)^{\frac{1}{p}}\leqslant C2^{jn(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}\|f*\psi_v\|_{L^p},$$

可得

$$J\leqslant C\Big(\sum_{j\in\mathbf{Z}}\sum_{|v-j|\leqslant C}2^{jqs}\|f*\psi_v\|_{L^p}^{q}\Big)^{\frac{1}{q}}\leqslant\Big[\sum_{v\in\mathbf{Z}}(2^{vs}\|f_v\|_p)^q\Big]^{\frac{1}{q}}.$$

第二步：不同小波基系数估计的不变性.

为了证明在任意正则小波基下估计的不变性，我们利用引理 6.1 给出的不同小波基之间相差几乎对角化的矩阵这一性质. 记

$$u_j=\Big(\sum_{\epsilon,k}|a_{j,k}^{\epsilon}|^{p}\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

为证明无关性，只需证明下面的估计：

$$I=\sum_{j}2^{jq(s+\frac{n}{2}-\frac{n}{p})}\Big(\sum_{\epsilon,k}\Big|\sum_{\epsilon',j',k'}a_{j,k,j',k'}^{\epsilon,\epsilon'}a_{j',k'}^{\epsilon'}\Big|^{p}\Big)^{\frac{q}{p}}\leqslant C_q\sum_{j'}2^{j'q((s+\frac{n}{2}-\frac{n}{p})}u_{j'}^{q}.$$

我们分 $0<p\leqslant1$ 和 $p>1$ 两种情况考虑.

当 $0<p\leqslant1$ 时，有

$$I \leqslant \sum_{j} 2^{jq(s+\frac{n}{2}-\frac{n}{p})} \Big(\sum_{\epsilon',j',k'} \sum_{\epsilon,k} |a_{j,k,j',k'}^{\epsilon,\epsilon'}|^p |a_{j',k'}^{\epsilon'}|^p \Big)^{\frac{q}{p}}.$$

对求和分成 $j' \leqslant j$ 和 $j' > j$ 两种情况有

$$I \leqslant C\sum_{j} 2^{jq(s+\frac{n}{2}-\frac{n}{p})} \Big(\sum_{j'\leqslant j} \sum_{\epsilon',k'} \sum_{\epsilon,k} |a_{j,k,j',k'}^{\epsilon,\epsilon'}|^p |a_{j',k'}^{\epsilon'}|^p \Big)^{\frac{q}{p}}$$

$$+ C\sum_{j} 2^{jq(s+\frac{n}{2}-\frac{n}{p})} \Big(\sum_{j'> j} \sum_{\epsilon',k'} \sum_{\epsilon,k} |a_{j,k,j',k'}^{\epsilon,\epsilon'}|^p |a_{j',k'}^{\epsilon'}|^p \Big)^{\frac{q}{p}}.$$

代入引理 6.1 中给出的 $|a_{j,k',j',k'}^{\epsilon,\epsilon'}|$ 的估计，得到

$$I \leqslant C\sum_{j} 2^{jq(s+\frac{n}{2}-\frac{n}{p})} \Big(\sum_{j'\leqslant j} 2^{-(p\gamma+\frac{pn}{2}-n)(j-j')} u_{j'}^{p} \Big)^{\frac{q}{p}}$$

$$+ C\sum_{j} 2^{jq(s+\frac{n}{2}-\frac{n}{p})} \Big(\sum_{j'> j} 2^{-p(\gamma+\frac{n}{2})|j-j'|} u_{j'}^{p} \Big)^{\frac{q}{p}}.$$

根据 p 和 q 的大小，分成两种情况. 如果 $q \leqslant p$，我们有

$$I \leqslant C\sum_{j} 2^{jq(s+\frac{n}{2}-\frac{n}{p})} \sum_{j'\leqslant j} 2^{-\frac{q}{p}(p\gamma+\frac{pn}{2}-n)(j-j')} u_{j'}^{q}$$

$$+ C\sum_{j} 2^{jq(s+\frac{n}{2}-\frac{n}{p})} \sum_{j'> j} 2^{-q(\gamma+\frac{n}{2})|j-j'|} u_{j'}^{q}.$$

交换求和顺序并整理和式，得到

$$I \leqslant C\sum_{j'} 2^{j'q(s+\frac{n}{2}-\frac{n}{p})} u_{j'}^{q} \sum_{j'\leqslant j} 2^{q(s-\gamma)(j-j')}$$

$$+ C\sum_{j'} 2^{j'q(s+\frac{n}{2}-\frac{n}{p})} u_{j'}^{q} \sum_{j'> j} 2^{-q(s+\gamma+n-\frac{n}{p})|j-j'|}.$$

注意到 $\left(\frac{1}{p}-1\right)n-\gamma < s < \gamma$，就得到 $q \leqslant p$ 时所要的估计. 如果 $q > p$，选取 δ 为充分小的正数，有

$$I \leqslant C\sum_{j} 2^{jq(s+\frac{n}{2}-\frac{n}{p})} \sum_{j'\leqslant j} 2^{[\delta-\frac{q}{p}(p\gamma+\frac{pn}{2}-n)](j-j')} u_{j'}^{q}$$

$$+ C\sum_{j} 2^{jq(s+\frac{n}{2}-\frac{n}{p})} \sum_{j'> j} 2^{[\delta-q(\gamma+\frac{n}{2})]|j-j'|} u_{j'}^{q}.$$

交换求和顺序并整理和式，得到

$$I \leqslant C\sum_{j'} 2^{j'q(s+\frac{n}{2}-\frac{n}{p})} u_{j'}^{q} \sum_{j'\leqslant j} 2^{[q(s-\gamma)-\delta](j-j')}$$

$$+ C\sum_{j'} 2^{j'q(s+\frac{n}{2}-\frac{n}{p})} u_{j'}^{q} \sum_{j'> j} 2^{[\delta-q(s+\gamma+n-\frac{n}{p})]|j-j'|}.$$

注意到 $\left(\frac{1}{p}-1\right)n-\gamma < s < \gamma$ 和 δ 为充分小的正数，就得到 $q > p$ 时所要的估计.

当 $p>1$ 时，记 $p'=\frac{p}{p-1}$，选取 δ 为充分小的正数和 $0<u=\frac{p-1}{p}<1$，我们反复使用 Hölder 不等式

$$\sum_k |a_k||b(k)|\leqslant\left(\sum|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum|b_k|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

及和式 $\sum_{\epsilon,k}|a^{\epsilon,\epsilon'}_{j,j',k,k'}|^s$ 和 $\sum_{\epsilon',k'}|a^{\epsilon,\epsilon'}_{j,j',k,k'}|^t$ 的有界性，于是，有

$$\begin{aligned}I\leqslant{}& C\sum_j 2^{jq(s+\frac{n}{2}-\frac{n}{p})}\left\{\sum_{\epsilon,k}\left[\sum_{j'\geqslant j}\left(\sum_{\epsilon',k'}|a^{\epsilon,\epsilon'}_{j,j',k,k'}|^{up'}\right)^{\frac{1}{p'}}\right.\right.\\&\left.\left.\left(\sum_{\epsilon',k'}|a^{\epsilon,\epsilon'}_{j,j',k,k'}|^{(1-u)p}|a^{\epsilon'}_{j',k'}|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p\right\}^{\frac{q}{p}}\\&+C\sum_j 2^{jq(s+\frac{n}{2}-\frac{n}{p})}\left\{\sum_{\epsilon,k}\left[\sum_{j'<j}\left(\sum_{\epsilon',k'}|a^{\epsilon,\epsilon'}_{j,j',k,k'}|^{up'}\right)^{\frac{1}{p'}}\right.\right.\\&\left.\left.\left(\sum_{\epsilon',k'}|a^{\epsilon,\epsilon'}_{j,j',k,k'}|^{(1-u)p}|a^{\epsilon'}_{j',k'}|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p\right\}^{\frac{q}{p}}\\\leqslant{}& C\sum_j 2^{jq(s+\frac{n}{2}-\frac{n}{p})}\left\{\sum_{\epsilon,k}\left[\sum_{j'\geqslant j}2^{[\frac{n(p-1)}{p}-u(\frac{n}{2}+\gamma)](j'-j)}\right.\right.\\&\left.\left.\left(\sum_{\epsilon',k'}|a^{\epsilon,\epsilon'}_{j,j',k,k'}|^{(1-u)p}|a^{\epsilon'}_{j',k'}|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p\right\}^{\frac{q}{p}}\\&+C\sum_j 2^{jq(s+\frac{n}{2}-\frac{n}{p})}\left\{\sum_{\epsilon,k}\left[\sum_{j'<j}2^{[u(\frac{n}{2}+\gamma)](j'-j)}\right.\right.\\&\left.\left.\left(\sum_{\epsilon',k'}|a^{\epsilon,\epsilon'}_{j,j',k,k'}|^{(1-u)p}|a^{\epsilon'}_{j',k'}|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p\right\}^{\frac{q}{p}}.\end{aligned}$$

考虑到 δ 为任意小正常数，有

$$\begin{aligned}I\leqslant{}& C\sum_j 2^{jq(s+\frac{n}{2}-\frac{n}{p})}\left(\sum_{\epsilon,k}\sum_{j'\geqslant j}2^{[\frac{n(p-1)}{p}-u(\frac{n}{2}+\gamma)+\delta](j'-j)p}\right.\\&\left.\sum_{\epsilon',k'}|a^{\epsilon,\epsilon'}_{j,j',k,k'}|^{(1-u)p}|a^{\epsilon'}_{j',k'}|^p\right)^{\frac{q}{p}}\\&+C\sum_j 2^{jq(s+\frac{n}{2}-\frac{n}{p})}\left(\sum_{\epsilon,k}\sum_{j'<j}2^{[u(\frac{n}{2}+\gamma)-\delta](j'-j)p}\right.\\&\left.\sum_{\epsilon',k'}|a^{\epsilon,\epsilon'}_{j,j',k,k'}|^{(1-u)p}|a^{\epsilon'}_{j',k'}|^p\right)^{\frac{q}{p}}\\\leqslant{}& C\sum_j 2^{jq(s+\frac{n}{2}-\frac{n}{p})}\left(\sum_{j'\geqslant j}2^{-[p(\frac{n}{2}+\gamma)-(p-1)n-\delta](j'-j)}u^p_{j'}\right)^{\frac{q}{p}}\end{aligned}$$

$$+C\sum_{j}2^{jq(s+\frac{n}{2}-\frac{n}{p})}\Big(\sum_{j'<j}2^{[p(\frac{n}{2}+\gamma)-n-\delta](j'-j)}u_{j'}^{p}\Big)^{\frac{q}{p}}.$$

根据 p 和 q 之间的关系分成两种情况考虑. 如果 $q\leqslant p$，那么有

$$\begin{aligned}I&\leqslant C\sum_{j}2^{jq(s+\frac{n}{2}-\frac{n}{p})}\sum_{j'\geqslant j}2^{-\frac{q}{p}[p(\frac{n}{2}+\gamma)-(p-1)n-\delta](j'-j)}u_{j'}^{q}\\&\quad+C\sum_{j}2^{jq(s+\frac{n}{2}-\frac{n}{p})}\sum_{j'<j}2^{\frac{q}{p}[p(\frac{n}{2}+\gamma)-n-\delta](j'-j)}u_{j'}^{q}\\&\leqslant C\sum_{j'}2^{j'q(s+\frac{n}{2}-\frac{n}{p})}u_{j'}^{q}\sum_{j'\geqslant j}2^{q(s-\gamma+n-\frac{\delta}{p})(j-j')}\\&\quad+C\sum_{j'}2^{j'q(s+\frac{n}{2}-\frac{n}{p})}u_{j'}^{q}\sum_{j'<j}2^{-q(s+\frac{\delta}{p}-\gamma)(j'-j)}.\end{aligned}$$

由于 $s<\gamma-n$ 和 δ 充分小，得到相应结论. 如果 $q>p$，选取 δ' 为充分小的正常数，那么有

$$\begin{aligned}I&\leqslant C\sum_{j}2^{jq(s+\frac{n}{2}-\frac{n}{p})}\sum_{j'\geqslant j}2^{-\frac{q}{p}[p(\frac{n}{2}+\gamma)-(p-1)n-\delta-\delta'](j'-j)}u_{j'}^{q}\\&\quad+C\sum_{j}2^{jq(s+\frac{n}{2}-\frac{n}{p})}\sum_{j'<j}2^{\frac{q}{p}[p(\frac{n}{2}+\gamma)-n-\delta-\delta'](j'-j)}u_{j'}^{q}\\&\leqslant C\sum_{j'}2^{j'q(s+\frac{n}{2}-\frac{n}{p})}u_{j'}^{q}\sum_{j'\geqslant j}2^{q(s-\gamma+n-\frac{\delta+\delta'}{p})(j-j')}\\&\quad+C\sum_{j'}2^{j'q(s+\frac{n}{2}-\frac{n}{p})}u_{j'}^{q}\sum_{j'<j}2^{-q(s+\frac{\delta+\delta'}{p}-\gamma)(j'-j)}.\end{aligned}$$

同样得到所要结论.

6.3　小波神经网络

大家会发现，小波的应用除背景和模型不同外，在小波算法上有相似性. 做一次讲演为了让大家喜欢，可能把很少的东西与很多的事情联系起来，以吸引大家的兴趣；但作为一门理论与应用相结合的课程，除了大致介绍一下问题的概况外，却有义务把很多复杂的东西的本质抽出来讲透，让复杂的知识变少，以便于掌握. 在需要的时候，可以自由地运用自如. 谈到应用问题时，首先需要建立它们的模型，用函数来描述对象，用算子来描述变换，小波恰好能表征这些特征. 这里我们不谈很多小波书上都有的信号处理和图像处理，仅挑选两个与我们生活息息相关的问题. 如我们每天都要思考，我们是怎样思考的？ 在数学上是如何描述神经网络的？ 我们的智能机器人是怎样模仿人类的思维的？ 这就是本节要介绍的应用问题 —— 小波神经网络. 我们将在下节介绍水波的另一个应用 —— 数字水印.

谈到小波神经网络，首先需要我们提出神经网络的数学模型是什么，即在数学上怎么模拟它们. 其实，所谓的神经网络的三个最基本概念是：神经元、神经网络和学习算法；我们需要针对这三个基本概念用严谨的数学语言来描述. 小波神经网络是建立在小波理论基础上的一种新型神经网络模型，它兼容了小波与神经网络的优越性. 一方面，充分利用了小波变换的时频局部化特性；另一方面，发挥了神经网络的自学习功能，从而具有较强的逼近与容错能力.

6.3.1 人工神经网络

人工神经网络是由大量的人工神经元广泛互连而成的网络. 人工神经元是对生物神经元的简化与模拟，是神经网络的基本处理单元. 所谓一个神经元是一个多输入单输出的非线性元件，其输入输出关系可描述为

$$y=g\left(\sum_{i=1}^{n}k_iu_i+I\right), \tag{6.10}$$

其中 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 是从其他神经元传来的输入，$k_1,k_2,\cdots,k_n$ 是对应于输入的连接权值，I 是一个阀值，g：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 为传递函数.

传统的传递函数 g 为 S 形的非线性函数，S 形函数的表达式为

$$g(x)=(1+\exp(-\beta x))^{-1},\quad \beta>0$$

或

$$g(x)=(1-\exp(-\beta x))(1+\exp(-\beta x))^{-1},\quad \beta>0.$$

前向神经网络是一类重要的神经网络，网络中每一个连接方向是向前的，从输入到输出没有反馈环. 这种神经网络有一个输入层、一个输出层以及一个或多个隐层(中间层). 隐层节点的输入和输出都是对网络内部的，输出层神经元的输出是网络的外部输出. 输入信号从输入层节点开始，依次传过各隐层节点，然后传到各输出节点，每一层的节点输出只影响下一层节点的输出. 确定隐层的个数和各层节点的个数以后，可以通过改变连接权值和阀值来获得网路期望的输入 / 输出响应. 描述多个神经元的相应的连接权值和阀值分别记为 $W_{i,j}$ 和 I_j.

神经网络的学习能力是指其逼近期望映射的能力，这通过考察代价函数来实现；前向神经网络具有非凡的学习(逼近) 期望映射能力. 通常采用 BP 算法来求连接权值 $W_{i,j}$ 和阀值 I_j. 定义代价函数

$$E=\sum_{(\boldsymbol{x}^i,y^i)\in\theta}\|O^i-y^i\|_2^2,$$

其中，$\boldsymbol{x}^i$ 为输入矢量，O^i 是网络对应于输入 $\boldsymbol{x}^i$ 的实际输出量，y^i 为对应于

输入 $\boldsymbol{x}^i$ 的期望输出. BP 算法使用梯度下降法来极小化 E，即

$$\Delta W_{i,j}=-\varepsilon\frac{\partial E}{\partial W_{i,j}},\quad \Delta I_j=-\varepsilon\frac{\partial E}{\partial I_j}.$$

Cybenko 建立了一个$\left(1+\frac{1}{2}\right)$层的神经网络. 称 $\sigma(\cdot)$ 是 **S 形函数**，如果

$$\sigma(t)\to\begin{cases}1, & t\to+\infty,\\ 0, & t\to-\infty.\end{cases}$$

称 $\sigma(\cdot)$ 是一个**能辨识函数**，对于$[0,1]^n$ 上的 Borel 测度 μ，若

$$\int_{[0,1]^n}\sigma(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+b)\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x})=0,\quad \forall\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n,\ b\in\mathbf{R},$$

则 $\mu=0$. Cybenko 证明了任何有界的可测 S 形函数是能辨识的. 特别地，任何连续的 S 形函数是能辨识的. 一个$\left(1+\frac{1}{2}\right)$层的神经网络的输出为

$$g(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{N}w_i\sigma(\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+b_i).$$

若$\sigma(\cdot)$是一个连续的能辨识的函数，那么形式为 $g(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{N}w_i\sigma(\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+b_i)$ 的有限和就在$[0,1]^n$ 上的连续函数空间中稠密.

6.3.2 小波神经网络

小波神经网络保持神经网络全局逼近特性，在同样的逼近质量下，小波神经网络的节点数减少了. 设 $i=1,2,\cdots,N$，ψ_i: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$，由 ψ_i 生成可数族，即

$$\begin{aligned}\Phi=\{&\det(\boldsymbol{D}_k^i)^{\frac{1}{2}}\psi_i(\boldsymbol{D}_k^i\boldsymbol{x}-\boldsymbol{t}_k^i):\ \boldsymbol{t}_k^i\in\mathbf{R}^n,\ \boldsymbol{D}_k^i=\mathrm{diag}(\boldsymbol{d}_k^i),\\ &\boldsymbol{d}_k^i\in\mathbf{R}_+^n,\ k\in\mathbf{Z}\},\end{aligned}\tag{6.11}$$

其中，$\boldsymbol{t}_k^i$ 是平移矢量，$\boldsymbol{d}_k^i$ 是伸缩矢量，$\boldsymbol{D}_k^i$ 是由 $\boldsymbol{d}_k^i$ 的各个分量构成的对角线矩阵. 设 Φ 满足框架特性：存在两个常数 $c_{\min}$ 和 $c_{\max}$，对于所有 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 中的 f，满足

$$c_{\min}\|f\|_2^2\leqslant\sum_{\varphi\in\Phi}|\langle\varphi,f\rangle|^2\leqslant c_{\max}\|f\|_2^2,\tag{6.12}$$

则 Φ 族在 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 中稠密. 这样的 Φ 族可以由连续小波分解得到. 考虑这些逼近的有限和，根据小波理论，可推出一个新的网络结构，即

$$g(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{N}w_i\psi_i(\boldsymbol{D}_i(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{t}_i))+\overline{g},\tag{6.13}$$

其中参数 $\overline{g}$ 用来处理在有限域中的非零均值函数. 为了补偿伸缩方向的可选

择性，可以把仿射变换与旋转变换结合起来，以便网络更具灵活性. 因此小波网络的结构如下：

$$g(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{N}w_i\psi_i(\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{R}_i(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{t}_i))+\bar{g},\tag{6.14}$$

这里 $\psi_i(\boldsymbol{x})$：$\mathbf{R}^n\rightarrow\mathbf{R}$ 为小波函数，$\boldsymbol{D}_i$ 是由伸缩矢量构成的对角矩阵，$\boldsymbol{R}_i$ 则为旋转矩阵. 上述的表达方式，可以从连续小波得到，这时可以取成径向基函数网络；同时也可以直接由小波框架结构得到，或特别地可以由正交小波基分解得到. 不过在高维，ψ 的个数不止一个；正交小波基情形不能取径向基.

类似于神经学习的 BP 算法，同样可以采用随机梯度算法来调整小波神经网络的参数. 训练集合是随机输入 / 输出对 $\{\boldsymbol{x},f(\boldsymbol{x})\}$ 的抽样集合，即 $\{\boldsymbol{x}_k,y_k=f(\boldsymbol{x}_k)+\boldsymbol{v}_k\}$，其中，$f(\cdot)$ 是待逼近的函数，$\{\boldsymbol{v}_k\}$ 为观测噪声序列. 将(3.14) 中所有参数 $\bar{g},w_i,\boldsymbol{t}_i,\boldsymbol{R}_i.\boldsymbol{D}_i$ 集合起来，用 Θ 表示，相应的网络输出 $f(\boldsymbol{x})$ 记为 $g_\Theta(\boldsymbol{x})$. y 是期望输出，代价函数为

$$C(\Theta)=\frac{1}{2}E[(g_\Theta(\boldsymbol{x})-y)^2].\tag{6.15}$$

求 Θ 使 $C(\Theta)$ 达到最小.

6.3.3 基于多分辨率分析的神经网络

不失一般性，考虑多输入单输出的小波神经网络. 给定多分辨率分析 $\{V_m\}$，设 V_m 是由

$$\{\varphi_{m,\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{t})=2^{\frac{mn}{2}}\varphi(2^m\boldsymbol{t}-\boldsymbol{k})\}_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n}$$

张成的子空间. 我们讨论一维情况. 设 $\forall f(t)\in L^2(\mathbf{R})$，函数学习的问题可以表述为：给定训练数据集合，即

$$T_N=\{(t_i,f(t_i))\}_{i=1}^N,$$

然后找出 $f(t)$ 的逼近估计. 这里假设训练数据未受到噪音的干扰，含噪音训练数据的情况可类似处理. 从小波理论可知，只要选择充分大的 M，$f(t)$ 就可以被充分逼近，使得

$$f(t)\cong\sum_k\langle f,\varphi_{M,k}\rangle\varphi_{M,k}(t).\tag{6.16}$$

(6.16) 可以被一个三层网络所实现，输入层是一个全通节点，其输入输出为 t. 隐含层包括可数的节点，由 k 标识，k 取遍所有整数. 隐含层节点的权值和非线性性是同样的，即分别为 2^M 和 $\varphi(\cdot)$，但其偏置不同，第 k 个节点的偏值为 k. 输出层是一个偏置为 0 的节点，该节点的权值在理想状态下应该是 (6.16) 的系数. 在大多数应用中，函数具有有限的支撑(如 Daubechies 小

波)，这使得隐含层可以只含有有限个节点. 当 $\varphi(t)$ 没有紧支集，但快速衰减时，同样也可这样认为. 如果 $f(t)$ 具有紧集，不妨设支集为 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$，则存在正整数 K，隐节点的标志范围从 $-K$ 到 K 变化. 上面描述的神经网络可以实现函数 $g(t)$，即

$$g(t)=\sum_{k=-K}^{K}\langle f,\varphi_{M,k}\rangle\varphi_{M,k}(t). \tag{6.17}$$

在(6.17)中只要选择适当的 c_k 就可以用来逼近 $f(t)$. 实际上，当训练数据集为 T_N 时，可从均方误差

$$e_N(f,g)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(f(t_i)-g(t_i))^2$$

的最小化来得到 c_k. 当 K 不大时，这个最小化过程可以通过对均方误差的偏导来求解. 当 K 比较大时，此求解方法涉及求一个较大矩阵的逆，计算量很大；这个最小化过程可以采用迭代梯度下降法来求解.

6.3.4　小波神经网络的特性

神经网络的收敛能力与神经网络可以学习什么样的函数有关，我们可以将神经网络看成一个函数逼近的方案，即它逼近被学习的函数. 定义 $\mathbf{R}^d$ 上的函数集合 F：

$$F=\bigcup_n F_n,$$

其中 F_n 是函数的子集，例如，在小波神经网络中，F_n 是由尺度 $n=2^M$ 的尺度函数构成的小波神经网络的集合.

(1)　由连续函数的逼近特性知道，当小波正则时，小波神经网络具有全局逼近特性.

(2)　从多分辨率分析知道，小波神经网络具有 L^2 逼近特性.

(3)　从小波对 Besov 空间的刻画知道，当小波正则时，小波神经网络逼近速度很快.

令 $f(\boldsymbol{x})\in L^2(\mathbf{R}^d)$ 为待估计的函数，假定 $f(\boldsymbol{x})$ 属于多分辨率分析 V_M，M 为足够大的整数. 则

$$f(\boldsymbol{x})=\sum_k\langle f,\varphi_{M,k}\rangle\varphi_{M,k}(\boldsymbol{x}).$$

令 $\hat{f}_{M,N}(\boldsymbol{x})$ 为小波神经网络由训练数据 $\hat{c}_{M,k}$ 确定的 $f(\boldsymbol{x})$ 的估计，

$$\hat{f}_{M,N}(\boldsymbol{x})=\sum_k\hat{c}_{M,k}\varphi_{M,k}(\boldsymbol{x}),$$

其中 $\hat{c}_{M,k}$ 由均方误差

$$e_N(f,g)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(f(t_i)-\hat{f}_{M,N}(t_i))^2$$

的最小化来求得，或者由

$$\hat{c}_{M,k}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}f(t_i)\varphi_{M,k}(t_i)$$

得到. 于是，给定训练列集 T_N，当 $N\to\infty$ 时，小波神经网络 $\hat{f}_{M,N}$ 为 L^2 一致的，即 $\|f-\hat{f}_{M,N}\|_2\to 0$.

6.4 数字水印

密码技术主要是研究如何将机密信息进行特殊的编码，以形成不可识别的密码形式进行传递. 随着计算机和网络通信技术的发展与普及，传统的信息加密更多地向信息隐藏转变. 信息加密和信息隐藏都是为了保护机密信息的存储和传输，使之免遭敌手的破坏和攻击. 数字音像制品以及其他电子出版物的传播和交易变得越来越便捷，随之而来的侵权盗版活动也日益猖獗. 近年来数字产品的版权纠纷案件越来越多，其原因是数字产品被无差别地大量复制成为轻而易举的事情. 如果没有有效的技术阻止这个势头，必将严重阻碍电子出版业及计算机软件业的发展. 随着数字技术和因特网的发展，各种形式的多媒体数字作品（图像、视频、音频等）纷纷以网络形式发表，其版权保护成为一个迫切需要解决的问题. 随着我国经济的发展，电子商务、网上交易也迅速发展起来，数字水印技术可以对这些电子服务提供保护. 因此，数字水印技术的发展前景非常广阔.

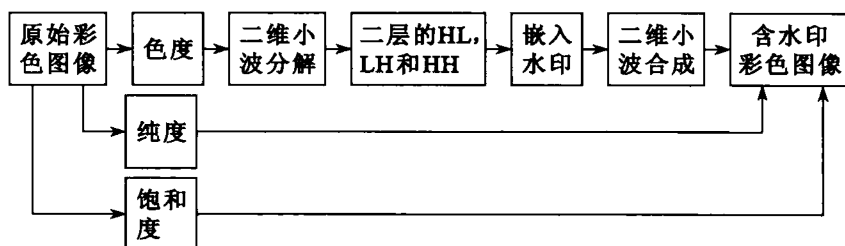
数字水印技术是指在数字化的数据内容中嵌入不明显的记号，可以是一段文字、标识、序列号等. 被嵌入的记号通常是不可见或不可觉察的，但是通过一些计算操作可以被检测或者被提取. 水印与源数据（如图像、音频、视频数据）紧密结合并隐藏其中，成为源数据不可分离的一部分. 由于数字水印是实现版权保护的有效方法，因此如今已经成为多媒体信息安全研究领域的一个热点，也是信息隐藏技术领域的重要分支. 在数字水印系统中，隐藏信息的丢失，即意味着版权信息的丢失，从而也就失去版权保护的功能，也就是说，这一系统是失败的. 因此一般地，数字水印应具有如下基本特征：

（1） 可证明性，即水印能够为受版权保护的数字信息产品的归属提供完全和可靠的证据.

（2） 不可感知性，这包括水印视觉上的不可见性和统计意义上的不可恢复性.

（3） 顽健性，即嵌入的水印信息应能够承受大量信号处理(如图像压缩、滤波、扫描与复印等)，几何形变(如图像旋转、裁剪、尺寸变化、删除等）以及恶意攻击.

一般地，水印的算法包括水印嵌入算法、水印提取算法或水印检测算法. 由于我们的课程是一个理论结合实践的课程，所以我们不打算去介绍所有的算法模型，而只是挑取其中的一个算法模型来简要地介绍数字水印. 比如针对彩色图像，其中的一种水印的嵌入方法可以按照下列方式操作：



在此水印算法里，首先通过小波把图像的色度进行分解，再对分解后的数据嵌入水印，最后把嵌入水印后的数据利用小波进行合成.

水印检测时需要原始水印 W，但不需要原始图像. 对待检测的彩色图像，首先获得灰度成分，分出二维小波分解的 HL,HH 和 LH 的所有系数 f^*，然后由水印 W 和 f^* 用某个算法算出相关值，符合则含有水印.

虽然我们有水印技术，但盗版还是不断，这就是常见的水印攻击技术. 下面列举 7 种：

（1） 鲁棒性攻击. 主要包括常见的各种信号处理操作，如图像压缩、线性或非线性滤波、叠加噪声、图像量化与增强、图像裁剪、几何失真、模拟数字转换以及图像的校正等.

（2） IBM 攻击. 这是针对可逆、非盲水印算法而进行的攻击. 其原理如下：设原始图像为 I，加入水印 W_A 后的图像为 $I_A=I+W_A$. 攻击者首先生成自己的水印 W_F，然后创建一个伪造的原图 $I_F=I_A-W_F$，也即

$$I_A=I_F+W_F.$$

这就产生无法分辨与解释的情况. 防止这一攻击的有效办法就是研究不可逆水印嵌入算法.

（3） StirMark 攻击. StirMark 是英国剑桥大学开发的水印攻击软件，它采用软件方法，实现对水印载体图像进行的各种攻击，从而在水印载体图像

中引入一定的误差，可以以水印检测器能否从遭受攻击的水印载体中提取／检测出水印信息来评定水印算法抗攻击的能力．例如，StirMark 可对水印载体进行重采样攻击，它可模拟如下过程中引入的误差：首先把图像用高质量打印机输出，然后再利用高质量扫描仪扫描，重新得到其图像．

（4） 马赛克攻击．其攻击方法是首先把图像分割成许多个小图像，然后将每个小图像放在 HTML 页面上拼凑成一个完整的图像．一般的 Web 浏览器都可以在组织这些图像时在图像中间不留任何缝隙，并且使这些图像的整体效果看起来跟原图一模一样，从而使得探测器无法从中检测到侵权行为．

（5） 串谋攻击．所谓串谋攻击就是利用同一原始多媒体数据集合的不同水印信号版本来生成一个近似的多媒体数据集合，以逼近和恢复原始数据，其目的是使检测系统无法在这一近似的数据集合中检测出水印信号的存在．

（6） 跳跃攻击．跳跃攻击主要用于对音频信号数字水印系统的攻击．其一般实现方法是在音频信号上加入一个跳跃信号，即首先将信号分成 500 个采样点为一个单位的数据块，然后在每一个数据块中随机复制或删除一个采样点来得到 501 或 499 个采样点的数据块，然后将数据块按原来顺序重新组合起来．实验表明，这种改变对古典音乐信号数据也几乎感觉不到，但是可以非常有效地阻止水印信号的检测定位，以达到难以提取水印信号的目的．类似的方法也可以用来攻击图像数据的数字水印系统．其实现方法也非常简单，即只要随机删除一定数量的像素列，然后用另外的像素列补齐即可．该方法虽然简单，但是仍然能有效地破坏水印信号存在的检验．

（7） 法学攻击．这种攻击方法跟前三种方法极为不同．比如：现有的或将有的关于版权及数字信息所有权的法律，不同于法庭对于法律条款的不同解释，原告与被告的信誉，攻击者质疑水印方案的能力，原告与被告的财力，他们各自能请到的专家和律师等．

习　题

1. 试着从其他书上找一下 Daubechies 小波对应的金字塔算法和它们对应的图解．

2. 查一下用小波刻画 Besov 空间以外的函数空间的证明．

3. 找一下更专门的用小波来讲述图像处理的书和水印的书，比较一下水印算法中所用的小波算法原理与图像处理中的相同与不同之处．



附录　模拟试卷

下面 7 套试卷主要是考查学生对小波及调和分析基本概念的掌握情况.

第一套试卷

(总分 135 分，任选，100 分为满分)

一、(45 分) 如果 $f(x)\in L^8(\mathbf{R})$，证明：存在 $f_n(x)\in S(\mathbf{R})$ 使得

$$\|f_n(x)-f(x)\|_{L^8}\to 0.$$

答题要点　具体可如下证明：

(1)　给定 $f(x)\in L^8(\mathbf{R})$，存在 $f_m(x)\in L^8(\mathbf{R})$，使得 $f_m(x)$ 的支集含于一个中心在原点、半径为 2^m 的球中，且 $\|f_m(x)-f(x)\|_{L^8}\to 0$. (5 分)

(2)　给定 $f(x)\in L^8(\mathbf{R})$ 且 $f(x)$ 的支集含于一个中心在原点、半径为 2^m 的球中，证明存在 $f_n(x)\in S(\mathbf{R})$ 使得 $\|f_n(x)-f(x)\|_{L^8}\to 0$. (15 分)

(3)　综合上面两点证明：如果 $f(x)\in L^8(\mathbf{R})$，那么存在 $f_n(x)\in S(\mathbf{R})$ 使得 $\|f_n(x)-f(x)\|_{L^8}\to 0$. (25 分)

二、(45 分) 假设 $\Phi^{1,\epsilon}(x)$ 为 Meyer 小波，$\Phi^{2,\epsilon}(x)$ 为 d 正则的 Daubechies 小波，且全为张量积小波. 令

$$a^{\epsilon,\epsilon'}_{j,k,j',k'}=\langle\Phi^{1,\epsilon}_{j,k},\Phi^{2,\epsilon}_{j,k}\rangle.$$

证明：如果 $0<\gamma<d$，那么

$$|a^{\epsilon,\epsilon'}_{j,k;j',k'}|\leqslant C_N 2^{-|j-j'|(\frac{n}{2}+\gamma)}\left(\frac{2^{-j}+2^{-j'}}{2^{-j}+2^{-j'}+|2^{-j}k-2^{-j'}k'|}\right)^{n+\gamma}. \quad ①$$

答题要点　按下面的步骤证明：

(1)　给定 $|\varphi(x)|\leqslant C_N(1+|x|)^{-N}$，$\forall N>0$；$\int x^\alpha\varphi(x)\mathrm{d}x=0$，$\forall\, 0\leqslant\alpha\leqslant m$. 令 $I\varphi(x)=I^1\varphi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(y)\mathrm{d}y$ 和 $I^s\varphi(x)=I(I^{s-1}\varphi)(x)$. 证明

$|I^s\varphi(x)| \leqslant C_N(1+|x|)^{-N}$, $\forall 1 \leqslant s \leqslant m, N > 0$. (10 分)

(2) 如果 $0 < \gamma < 1$, $N > n$, 那么

$$\int (1+|x|)^{-2N}(1+|\gamma x - k|)^{-2N} dx \leqslant (1+|k|)^{-N}. \text{(10 分)}$$

(3) 综合上面两步证明估计式①. (25 分)

三、(45 分) 对于满足 $\varepsilon + \varepsilon' < \beta - \alpha$ 的正数 ε 和 ε', 构造钟形函数 $b = b_{I,\varepsilon,\varepsilon'}$, 满足如下 4 个条件:

(ⅰ) $\operatorname{supp} b \subset [\alpha - \varepsilon, \beta + \varepsilon']$;

(ⅱ) $b^2(\xi) + b^2(2\alpha - \xi) = 1$, $\forall \xi \in [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$;

(ⅲ) $b(\xi) = 1$, $\forall \xi \in [\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon']$;

(ⅳ) $b^2(\xi) + b^2(2\beta - \xi) = 1$, $\forall \xi \in [\beta - \varepsilon', \beta + \varepsilon']$.

答题要点 按下面步骤证明:

(1) 从一个非负偶函数出发, 构造 $\theta_\varepsilon(\xi) \in C^\infty$ 使得在 $\xi \leqslant -\varepsilon$ 时为 0, 在 $\xi \geqslant \varepsilon$ 时为 $\frac{\pi}{2}$. (17 分)

(2) 验证 $\sin\theta_\varepsilon(\xi - \alpha)\cos\theta_{\varepsilon'}(\xi - \beta)$ 满足上面三条件. (28 分)

第二套试卷

(总分 120 分, 任选, 100 分为满分)

一、(80 分) 如果 $f(x) \in L^2(\mathbf{R}^n)$, 证明: $\hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbf{R}^n)$.

答题要点 按如下步骤证明:

(1) 如果 $f(x) \in L^1(\mathbf{R}^n) \cap L^2(\mathbf{R}^n)$, 证明

$$F(F^{-1})f = F^{-1}Ff = f, \text{ a. e. (20 分)}$$

(2) 如果 $f(\mathbf{x}) \in L^1(\mathbf{R}^n) \cap L^2(\mathbf{R}^n)$, 证明: $\hat{f}(\boldsymbol{\xi}) \in L^2(\mathbf{R}^n)$. (20 分)

(3) 证明 $|\langle \hat{f}, \varphi \rangle| \leqslant C\|\varphi\|_{L^2}$, $\forall \varphi \in S(\mathbf{R}^n)$. (20 分)

(4) 根据对偶原理得到, 如果 $f(\mathbf{x}) \in L^2(\mathbf{R}^n)$, 则 $\hat{f}(\boldsymbol{\xi}) \in L^2(\mathbf{R}^n)$. (20 分)

二、(40 分) 多分辨率分析

1. 给出一个正则的多分辨率分析的例子. (20 分)

2. 证明: 所给出的多分辨率分析的例子符合正则的多分辨率分析的条

件. (20 分)

提示：比如选取 Meyer 小波等.

第三套试卷

(开卷，150 分钟，总分 120 分，任选，100 分为满分)

1. (20 分) 不利用 Hölder 不等式证明：如果 $f(x),g(x)\in L^6$，那么乘积 $f(x)g(x)$ 必定属于 L^3.

答题要点 令 $a=|f|^3\|f\|_6^{-3}$，$b=|g|^3\|g\|_6^{-3}$. 因为 $2ab\leqslant a^2+b^2$，两边积分就得到所需要结论.

2. (25 分) 如果 $f(x)=(1+|x|)^{-2}\operatorname{sgn}(x)$，那么存在 $f_m(x)\in S(\mathbf{R})$ 使得 $\forall p>1$ 有 $\|f_m(x)-f(x)\|_p\to 0$.

答题要点 令 $\chi_m(x)$ 为球 $B(0,2^m)$ 上的特征函数，令 $\varphi(x)\in C_0^\infty(B(0,1))$ 且积分为 1. 令 $\varphi_m(x)=2^{mn}\varphi(2^m x)$ 及令 $f_m(x)=(f\chi_m)*(\varphi_m)(x)$. 容易验证所有条件.

3. (45 分) $L^2(\mathbf{R}^n)$ 的一个一阶正则多分辨率分析是 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 的一列单调上升的子空间 $V_j\,(j\in\mathbf{Z})$，它们具有以下性质：

(ⅰ) $\bigcap\limits_{-\infty}^{\infty}V_j=\{0\}$，$\bigcup\limits_{-\infty}^{\infty}V_j$ 在 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 中稠密；

(ⅱ) $\forall f\in L^2(\mathbf{R}^n)$，$\forall j\in\mathbf{Z}$，$f(\boldsymbol{x})\in V_j\Leftrightarrow f(2\boldsymbol{x})\in V_{j+1}$；

(ⅲ) $\forall f\in L^2(\mathbf{R}^n)$，$\forall \boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n$，$f(\boldsymbol{x})\in V_0\Leftrightarrow f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{k})\in V_0$；

(ⅳ) 存在一个函数 $g(\boldsymbol{x})\in V_0$，使得 $g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{k})\ (\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n)$ 是空间 V_0 的一组 Riesz 基；

(ⅴ) $|\partial_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{\alpha}}g(\boldsymbol{x})|\leqslant C_N(1+|\boldsymbol{x}|)^{-N}$，　$\forall|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant 1,\ N>0$.

请在 n 维情形给出一个一阶正则多分辨率分析，并逐条验证.

提示：先利用单位二进方体上的特征函数的卷积的整平移生成 L^2 的闭子空间 V_0，然后利用其伸缩得到所需多分辨率分析，再逐点验证性质.

4. (30 分) 给定 $1<s<2$，称 $f(\boldsymbol{x})\in C_{\boldsymbol{x}_0}^s$，如果存在 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域 $V_{\boldsymbol{x}_0}$ 使得在此邻域内 $\mathrm{D}^{\boldsymbol{\alpha}}f(\boldsymbol{x})$ 存在并且

$$|\mathrm{D}^{\boldsymbol{\alpha}}f(\boldsymbol{x})-\mathrm{D}^{\boldsymbol{\alpha}}f(\boldsymbol{x}_0)|\leqslant C|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^{s-1},\quad \forall|\boldsymbol{\alpha}|=1.$$

给定 $\Lambda=\{(\epsilon,j,k):\epsilon\in\{0,1\}^n\backslash\{\mathbf{0}\},\ j\in\mathbf{Z},\ k\in\mathbf{Z}^n\}$，给定 2 阶光滑的具有紧支集和 2 阶消失矩的正交的张量积小波基$\{\Phi^{\epsilon}_{j,k}\}_{(\epsilon,j,k)\in\Lambda}$.

(1) 设 $f(x)\in C^s_{x_0}$，则存在正常数 C_1 和正常数 C_2 使得 $f(x)$ 的小波系数 $f^{\epsilon}_{j,k}=\langle f(x),\Phi^{\epsilon}_{j,k}(x)\rangle$ 满足

$$|f^{\epsilon}_{j,k}|\leqslant C2^{-j(s+\frac{n}{2})},\quad \forall j\geqslant C_1,\ |x_0-2^{-j}k|\leqslant C_2. \qquad ①$$

(2) 反过来，若 $f(x)$ 的小波系数满足 ①，那么 $f(x)\in C^s_{x_0}$.

答题要点 (1) 对于 2 阶光滑的具有紧支集和 2 阶消失矩的正交的张量积小波基$\{\Phi^{\epsilon}_{j,k}\}_{(\epsilon,j,k)\in\Lambda}$，如果$\epsilon\neq\mathbf{0}$，那么存在一个指标最小的 i_ϵ 使得$\epsilon_{i_\epsilon}=1$，那么

$$I^{\epsilon}\Phi^{\epsilon}(x)=\int_{-\infty}^{x_{i_\epsilon}}\Phi^{\epsilon}(x_1,\cdots,x_{-1+i_\epsilon},y,x_{1+i_\epsilon},\cdots,x_n)\mathrm{d}y$$

是一个 3 阶光滑的具有紧支集和 1 阶消失矩的函数. 另外，记 D^{ϵ} 为对函数第 i_ϵ 个变量微分的算子. 于是

$$f^{\epsilon}_{j,k}=\langle f,\Phi^{\epsilon}_{j,k}\rangle=-2^{-j}\langle \mathrm{D}^{\epsilon}f,2^{\frac{nj}{2}}(I^{\epsilon}\Phi^{\epsilon})(2^jx-k)\rangle.$$

再利用消失矩性质和条件 $f(x)\in C^s_{x_0}$ 得到所需结论.

(2) 对于函数 $f(x)=\sum\limits_{(\epsilon,j,k)\in\Lambda,\ j\geqslant C_1}f^{\epsilon}_{j,k}\Phi^{\epsilon}_{j,k}(x)$，根据 $|x-x_0|$ 的大小把 j 分成两部分估计.

第四套试卷

（总分 120 分，任选，100 分为满分，答中基本点得分）

一、(50 分) 令$[x]$为实数 x 的整数部分，

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & \text{如果 } x\geqslant 0,\\ -1, & \text{如果 } x<0.\end{cases}$$

令

$$f(x)=(2+|x|)^{-1}\log^{-2}(2+|x|)\ \operatorname{sgn}\left(x-2\left[\frac{x}{2}\right]-1\right).$$

证明：存在 $f_m(x)\in S(\mathbf{R})$，使得 $\forall p>1$ 有$\|f_m(x)-f(x)\|_p\to 0$.

答题要点 令 $f_n(x)$ 为 $f(x)$ 在 $B(0,n)=[-n,n]$ 上的限制：

$$f_n(x)=f(x)\chi_{B(0,n)}(x).\ (4\text{ 分})$$

则

$$\|f_n(x)\|_1 \leqslant \|f(x)\|_1 = 2\int_0^{+\infty} (2+|x|)^{-1}\log^{-2}(2+|x|)\mathrm{d}x$$
$$= 2\log 2,$$
$$\int_{|x|\geqslant n} |f(x)|^p \mathrm{d}x \leqslant 2(n+2)^{1-p}(p-1)^{-1}. \text{（8 分）}$$

选取 $\varphi(x) \in S(\mathbf{R})$，$\int_{\mathbf{R}} \varphi(x)\mathrm{d}x = 1$，$\operatorname{supp}\varphi \subset [-1,1]$. 再令

$$\varphi_m(x) = m\varphi(mx), \quad f_{m,n}(x) = f_n\varphi_m(x). \text{（8 分）}$$

则

$$\operatorname{supp} f_{m,n}(x) \subset B(0, n+2m^{-1}). \text{（5 分）}$$

由于

$$\left|\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{\alpha} f_{m,n}(x)\right| \leqslant \left|f_n\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{\alpha}\varphi_m(x)\right| \leqslant \|f_n(x)\|_1 \left\|\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{\alpha}\varphi_m(x)\right\|_{\infty}$$
$$\leqslant C_m,$$

因此 $f_{m,n}(x) \in S(\mathbf{R})$.（5 分）

另外，

$$f_{m,n}(x) - f_n(x) = \int (f_n(x-y) - f_n(x))\varphi_m(y)\mathrm{d}y; \text{（5 分）}$$

由此

$$\|f_{m,n}(x) - f_n(x)\|_p \leqslant \sup_{|y|\leqslant m^{-1}} \|f_n(x-y) - f_n(x)\|_p \|\varphi\|_1. \text{（10 分）}$$

令 $f_m(x) = f_{m,m}(x)$，故 $\|f_m(x) - f(x)\|_p \to 0$.（5 分）

二、(35 分) 令 $\chi_E(\boldsymbol{x})$ 为集合 E 上的特征函数，

$$f_k(\boldsymbol{x}) = \chi_{(2^{k^2},0,\cdots,0)+[0,1]^n}(\boldsymbol{x}), \quad \forall k \in \mathbf{N}.$$

证明：

(1) $\|f_k(\boldsymbol{x})\|_p = 1$，$\forall\, 0 < p \leqslant \infty$；

(2) 不存在函数 $f(\boldsymbol{x})$ 和 $p > 0$ 使得存在 $f_k(\boldsymbol{x})$ 的某个子序列能够在 L^p 范数意义下收敛到 $f(\boldsymbol{x})$；

(3) 在分布意义下存在 $f(\boldsymbol{x})$ 使得 $f_k(\boldsymbol{x}) \to f(\boldsymbol{x})$.

答题要点

$$\int |f_k(\boldsymbol{x})|^p \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{(2^{k^2},0,\cdots,0)+[0,1]^n} \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 1. \text{（5 分）}$$

同理，$\|f_k(\boldsymbol{x}) - f_l(\boldsymbol{x})\|_p = 2^{p^{-1}}$. 因此在 L^p 范数意义下不存在收敛的 Cauchy 列.（15 分）

但是，$\forall\, \varphi(\boldsymbol{x}) \in S(\mathbf{R}^n)$，

$$I_k = |\langle f_k - 0, \varphi \rangle| \leqslant \int_{(2^{k^2},0,\cdots,0)+[0,1]^n} |\varphi(x)| \, dx;$$

又

$$|\varphi(x)| \big|_{(2^{k^2},0,\cdots,0)+[0,1]^n} \leqslant (1+|k|)^{-1},$$

故 $|I_k| \leqslant (1+|k|)^{-1}$. (15 分)

三、(35 分) $L^2(\mathbf{R}^n)$ 的一个正交多分辨率分析是 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 的一列单调上升的子空间 $V_j (j \in \mathbf{Z})$，它们具有以下性质：

(ⅰ) $\bigcap\limits_{-\infty}^{\infty} V_j = \{\mathbf{0}\}$，$\bigcup\limits_{-\infty}^{\infty} V_j$ 在 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 中稠密；

(ⅱ) $\forall f \in L^2(\mathbf{R}^n)$，$\forall j \in \mathbf{Z}$，$f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$；

(ⅲ) $\forall f \in L^2(\mathbf{R}^n)$，$\forall \boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}^n$，$f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(x-\boldsymbol{k}) \in V_0$；

(ⅳ) 存在一个函数 $g(x) \in V_0$，使得 $g(x-\boldsymbol{k})$ $(\boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}^n)$ 是空间 V_0 的一组正交基.

请在 n 维情形给出一个简单的正交多分辨率分析，并逐条验证.

答题要点 取 $g(x) = \chi_{[0,1]^n}(x)$，定义

$$V_0 = \left\{ \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} a_k g(x-\boldsymbol{k}) : a_k \in l^2 \right\},$$

$$V_j = \{ f(2^j x) : f(x) \in V_0 \}.$$

V_j 自然是 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 的一列子空间. 其中函数在边长为 2^{-j} 的二进方体上为常数，自然是单调上升的. (9 分)

$f \in \bigcap\limits_{-\infty}^{\infty} V_j$. 令 $\boldsymbol{\epsilon} \in \{0, -1\}^n$，则 f 在 $2^j \boldsymbol{\epsilon} + 2^j [0,1]^n$ 上取常数 C_ϵ，且

$$C \geqslant \int |f|^2 dx \geqslant \sum_{\epsilon \in \{0,-1\}^n} C_\epsilon{}^2 2^{jn}.$$

由 j 的任意性，取 $j \to +\infty$，$C_\epsilon = 0$，$\forall \boldsymbol{\epsilon} \in \{0, -1\}^n$. 这就是说，$f$ 在 $2^j[-1,1]^n$ 上取值 0. 由 j 的任意性，$f \equiv 0$. (8 分)

由于 $f \in L^2$. 令 $E_N = \{x : |f| > 2^N\}$. $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N, N' \in \mathbf{N}$，使得

$$|E_N| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}, \quad \int_{\mathbf{R}^n \setminus N'[-1,1]^n} |f| \, dx \leqslant \frac{\varepsilon}{4}.$$

选取充分大的整数 m 使得 $4(2N')^n \leqslant \varepsilon m^2$. 对于满足如下条件的整数 k，

$$-2^N \leqslant km^{-1} \leqslant 2^N - m^{-1},$$

令

$$E_{m,k} = \{x : km^{-1} < f(x) \leqslant (k+1)m^{-1}\} \cap N'[-1,1]^n,$$

则存在含于 $E_{m,k}$ 的有限个二进方体 $E_{m,k,l}$ 使得

$$|E_{m,k}-\bigcup_{l}E_{m,k,l}|\leqslant m^{-1}2^{-3(N+2)}\varepsilon.$$

令 $E=\bigcup_{k}(E_{m,k}-\bigcup_{l}E_{m,k,l})$，则 $|E|\leqslant 2^{-2(N+1)}\varepsilon$. 记 δ 为最小二进方体的边长. 将 $N'[-1,1]^n$ 重新划分为二进方体 Q_τ 的并. 如果 $\boldsymbol{x}\in Q_\tau\subset E_{m,k,l}$，那么令 $f_\varepsilon(\boldsymbol{x})=km^{-1}$；否则为 0. 于是

$$\begin{aligned}\int|f-f_\varepsilon|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}&\leqslant\int_{\mathbf{R}^n\setminus N'[-1,1]^n}|f|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int_{E_N}|f|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int_{E}|f|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\&\quad+\sum_{k,l}\int_{E_{m,k,l}}|f-f_\varepsilon|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+2^{2N}2^{-2(N+1)}\varepsilon+m^{-2}(2N')^n\\&\leqslant\varepsilon.\end{aligned}$$

因此 $\bigcup_{-\infty}^{\infty}V_j$ 在 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 中稠密. (9 分)

伸缩和平易不变性由定义给出. (2 分)

$\{g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{k})\}_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n}$ 生成 V_0，且

$$I_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}}=\langle g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{k}),g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{l})\rangle=\int_{(\boldsymbol{k}+[0,1]^n)\cap(\boldsymbol{l}+[0,1]^n)}=\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}}.$$

故知 $\{g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{k})\}_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n}$ 为 V_0 的正交基. (7 分)

第五套试卷

(总分 120 分，任选，100 分为满分)

一、(45 分) 令 $f(\boldsymbol{x})\in L^p(\mathbf{R}^n)$，$\forall p>1$. 证明：存在 $f_m(\boldsymbol{x})\in C^\infty(\mathbf{R}^n)\cap L^p(\mathbf{R}^n)$ 使得

$$\|f_m(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})\|_p\to 0,\quad \forall p>1.$$

答题要点 令 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 为支集在单位球内的 C^∞ 函数，它的积分等于 1，令

$$\varphi_t(\boldsymbol{x})=t^n\varphi(t\boldsymbol{x});$$

令 $\chi_s(\boldsymbol{x})$ 为半径为 s、球心在原点的球 $B(0,s)$ 上的特征函数. 令

$$f_s(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})\chi_s(\boldsymbol{x}),$$

于是，当 $s\to+\infty$ 时有 $f_s(\boldsymbol{x})$ 在 L^p 范数意义下趋于 $f(\boldsymbol{x})$. 令

$$f_{s,t}(\boldsymbol{x})=f_s*\varphi_t(\boldsymbol{x}),$$

于是，当 $t\to+\infty$ 时有 $f_{s,t}(\boldsymbol{x})$ 在 L^p 范数意义下趋于 $f_s(\boldsymbol{x})$.

易于验证 $f_{s,t}(\boldsymbol{x})\in C^\infty(\mathbf{R}^n)\cap L^p$，这样我们可以选取一组特殊的收敛

序列使得结论成立.

二、(30 分) 令 $\chi_E(x)$ 为集合 E 上的特征函数,

$$f_k(x)=\mathrm{e}^{-|x|^2}+\chi_{(2^{k^2},0,\cdots,0)+[0,1]^n}(x), \quad \forall k\in\mathbf{N}.$$

证明:

(1) $\|f_k(x)\|_p\leqslant 10$, $\forall 1<p\leqslant\infty$;

(2) 不存在函数 $f(x)$ 和 $p>0$ 使得存在 $f_k(x)$ 的某个子序列能够在 L^p 范数意义下收敛到 $f(x)$;

(3) 在分布意义下存在 $f(x)$ 使得 $f_k(x)\to f(x)$.

答题要点 (1) 可直接验证.

(2) 用反证法. 假设存在函数 $f(x)$ 及存在 $f_k(x)$ 的某个子序列 $f_{k_N}(x)$ $(N=1,2,\cdots)$ 使得

$$\|f_{k_N}(x)-f(x)\|_p\leqslant 2^{-N}.$$

从而在单位方体 $(2^{k_N^2},0,\cdots,0)+[0,1]^n$ 上有 $\|f_{k_N}(x)-f(x)\|_p\leqslant 2^{-N}$. 另外, 我们知道 $\mathrm{e}^{-|x|^2}$ 在单位方体 $(2^{k_N^2},0,\cdots,0)+[0,1]^n$ 上的值小于 2^{-N} $(\to 0)$.

这就是说, 在单位方体 $(2^{k_N^2},0,\cdots,0)+[0,1]^n$ 上有

$$\|f(x)\|_{L^p((2^{k_N^2},0,\cdots,0)+[0,1]^n)}\geqslant 1-2^{1-N}.$$

从而

$$\|f(x)\|_{L^p}\geqslant\sum_{N\geqslant 3}\|f(x)\|_{L^p((2^{k_N^2},0,\cdots,0)+[0,1]^n)}\geqslant\sum_{N\geqslant 3}(1-2^{1-N})\to\infty,$$

与 $\|f(x)\|_p\leqslant 11$ 矛盾.

(3) $\forall\varphi(x)\in S(\mathbf{R}^n)$, 我们知道

$$\langle f_k(x)-\mathrm{e}^{-|x|^2},\varphi(x)\rangle=\langle\chi_{(2^{k^2},0,\cdots,0)+[0,1]^n}(x),\varphi(x)\rangle.$$

而后者的绝对值小于 $2^{-k^2}\|x\varphi(x)\|_\infty$ 趋于 0. 因此在分布意义下有

$$f_k(x)\to\mathrm{e}^{-|x|^2}.$$

三、(45 分) $L^2(\mathbf{R}^n)$ 的一个一阶正则多分辨率分析是 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 的一列单调上升的子空间 $V_j(j\in\mathbf{Z})$, 它们具有以下性质:

(i) $\bigcap\limits_{-\infty}^{\infty}V_j=\{\mathbf{0}\}$, $\bigcup\limits_{-\infty}^{\infty}V_j$ 在 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 中稠密;

(ii) $\forall f\in L^2(\mathbf{R}^n)$, $\forall j\in\mathbf{Z}$, $f(x)\in V_j\Leftrightarrow f(2x)\in V_{j+1}$;

(iii) $\forall f\in L^2(\mathbf{R}^n)$, $\forall \boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n$, $f(x)\in V_0\Leftrightarrow f(x-\boldsymbol{k})\in V_0$;

(iv) 存在一个函数 $g(x)\in V_0$, 使得 $g(x-\boldsymbol{k})$ $(\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n)$ 是空间 V_0 的

一组 Riesz 基；

（V） $|\partial_x^{\alpha} g(\boldsymbol{x})| \leqslant C_N(1+|\boldsymbol{x}|)^{-N}$，$\forall |\boldsymbol{\alpha}| \leqslant 1$，$N>0$.

请在 n 维情形给出一个简单的一阶正则多分辨率分析，并逐条验证.

答题要点 令 $\chi(\boldsymbol{x})$ 为单位方体$[0,1]^n$ 上的特征函数，令 $g(\boldsymbol{x})=\chi*\chi(\boldsymbol{x})$，并令

$$V_0=\left\{f(\boldsymbol{x})\in L^2(\mathbf{R}^n):f(\boldsymbol{x})=\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n}g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{k})\right\}.$$

再利用伸缩定义 V_j. 然后逐条验证所定义的 V_j 满足所有条件.

第六套试卷

（总分 100 分）

一、（15 分）已知 $g_s(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{k})$ $(\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n)$ 是 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 上 r 正则的多分辨率分析 $V_j^s(s=1,2,\cdots,n)$ 的一组 Riesz 基. 根据已知条件，构造出 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 上的一个 r 正则的多分辨率分析 V_j.

答题要点 令

$$V_j=\left\{f(\boldsymbol{x})=\prod_{s=1}^{n}f_s(\boldsymbol{x}_s):f_s(\boldsymbol{x}_s)\in V_j^s\right\}.\ (2\text{ 分})$$

很显然，V_j 是一列单调上升的闭子空间.（2 分）

V_j 满足下面三条件：

(1) $\bigcap\limits_{-\infty}^{\infty}V_j=\{\mathbf{0}\}$，$\bigcup\limits_{-\infty}^{\infty}V_j$ 在 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 中稠密；（2 分）

(2) $\forall f\in L^2(\mathbf{R}^n)$，$\forall j\in\mathbf{Z}$，$f(\boldsymbol{x})\in V_j\Leftrightarrow f(2\boldsymbol{x})\in V_{j+1}$；（2 分）

(3) $\forall f\in L^2(\mathbf{R}^n)$，$\forall \boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n$，$f(\boldsymbol{x})\in V_0\Leftrightarrow f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{k})\in V_0$.（2 分）

$\forall \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$，令 $g(\boldsymbol{x})=\prod\limits_{s=1}^{n}g_s(x_s)$，则 $g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{k})(\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n)$ 是空间 V_0 的一组 Riesz 基.（3 分）

由 $g_s(\boldsymbol{x})$ 是 r 正则的推出 $g(\boldsymbol{x})$ 是 r 正则的.（2 分）

二、（15 分）已知 $V_j(j\in\mathbf{Z})$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的一组正交多分辨率分析，$W_j=V_{j+1}\ominus V_j$. 已知$\{\psi(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$是 W_0 的一组正交基，证明：$\{\psi_{j,k}(x)\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 中的一组正交基.

答题要点 由于$\{\psi(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$是 W_0 的一组正交基，因此固定 $j\in\mathbf{Z}$，

$\{\psi_{j,k}(x)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 是 W_j 的一组正交基.（3 分）

若 $j>j'$（$j<j'$ 的情况同样考虑），那么 $\psi_{j',k'}(x)\in V_{j'+1}\subset V_j$. 由于 $\psi_{j,k}(x)\in V_{j+1}\ominus V_j$，因此 $\psi_{j',k'}(x)$ 正交于 $\psi_{j,k}(x)$（3 分）.

这就是说，$\{\psi_{j,k}(x)\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的一组正交函数系.（3 分）

由 $V_{j+1}=\bigoplus_{j'\leqslant j}W_{j'}$（1 分），$V_j$ 的单调性(1 分）和 $\bigcup_{-\infty}^{\infty}V_j$ 在 $L^2(\mathbf{R})$ 中稠密（1 分），得到 $\{\psi_{j,k}(x)\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ 的线性组合在 $L^2(\mathbf{R})$ 中稠密（2 分），从而 $\{\psi_{j,k}(x)\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ 为 $L^2(\mathbf{R})$ 中的一组正交基(1 分).

三、(40 分）给定 $0<s<1<p,q<\infty$. 我们称 $f(\boldsymbol{x})\in B_p^{s,q}$，如果存在 $f_j(\boldsymbol{x})$（$j\in\mathbf{N}$）和 $\{\varepsilon_j\}\in l^q$ 满足条件

$$\|\partial^{\boldsymbol{\alpha}}f_j\|_p\leqslant\varepsilon_j 2^{(|\boldsymbol{\alpha}|-s)j}\quad(0\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant 1)$$

使得 $f(\boldsymbol{x})=\lim\limits_{j\to+\infty}f_j(\boldsymbol{x})$. 令 $\{\Phi_{j,k}^{\epsilon}(\boldsymbol{x})\}_{(\epsilon,j,k)\in\Lambda}$ 是 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 的一组正则的正交基. 对于函数 $g(\boldsymbol{x})=\sum\limits_{(\epsilon,j,k)\in\Lambda}a_{j,k}^{\epsilon}\Phi_{j,k}^{\epsilon}(\boldsymbol{x})$，记

$$\tau_j=2^{j(s+\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\Big(\sum_{\epsilon,k}|a_{j,k}^{\epsilon}|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

试证明：$g(\boldsymbol{x})\in B_p^{s,q}$ 等价于 $\{\tau_j\}\in l^q$.

答题要点 令 $g_j=f_{j+1}-f_j$，则 $f=f_0+g_0+g_1+\cdots$. 如果 $f(\boldsymbol{x})\in B_p^{s,q}$，那么

$$\|\partial^{\boldsymbol{\alpha}}g_j\|_p\leqslant(\varepsilon_j+\varepsilon_{j+1})2^{(1-s)j}\quad(|\boldsymbol{\alpha}|=1),$$

$$\|g_j\|_p\leqslant(\varepsilon_j+\varepsilon_{j+1})2^{-sj}.\ (5\text{ 分})$$

如果 $j=0$，那么运用 Hölder 不等式有

$$\begin{aligned}\sum_k|a_{0,k}^{\epsilon}|^p&=\sum_k|\langle f,\Phi^{\epsilon}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{k})\rangle|^p\\&\leqslant\sum_k\int|f(\boldsymbol{x})|^p|\Phi^{\epsilon}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{k})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\left(\int|\Phi^{\epsilon}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{k})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{p-1}\\&\leqslant C\leqslant\int|f(\boldsymbol{x})|^p\sum_k|\Phi^{\epsilon}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{k})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\&\leqslant C\int|f(\boldsymbol{x})|^p\mathrm{d}\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

如果 $j>0$，令 $I\Phi^1(\boldsymbol{x})=\int_{-\infty}^{|x|}\Phi^1(y)\mathrm{d}y$. 分三种情况. 令

$$a_{j,k}^{\epsilon,-1}=\langle f_0,\Phi_{j,k}^{\epsilon}(\boldsymbol{x})\rangle=-2^{-\frac{j}{2}}\langle f_0',(I\Phi^{\epsilon})(2^j\boldsymbol{x}-\boldsymbol{k})\rangle,$$

于是

$$\sum_k |a_{j,k}^{\epsilon,-1}|^p \leqslant 2^{-\frac{pj}{2}} \sum_k \langle |f_0'|, |(I\Phi^\epsilon)(2^j x - k)| \rangle^p \leqslant C\epsilon_0^p 2^{(1-\frac{3p}{2})j}.$$

若 $0 \leqslant j' \leqslant j$，令

$$a_{j,k}^{\epsilon,j'} = \langle g_{j'}, \Phi_{j,k}^\epsilon(x) \rangle = -2^{-\frac{j}{2}} \langle g_{j'}', (I\Phi^\epsilon)(2^j x - k) \rangle,$$

于是

$$\sum_k |a_{j,k}^{\epsilon,j'}|^p \leqslant 2^{-\frac{pj}{2}} \sum_k |\langle g_{j'}', (I\Phi^\epsilon)(2^j x - k) \rangle|^p$$

$$\leqslant C(\epsilon_{j'} + \epsilon_{j'+1})^p 2^{p(1-s)j' + (1-\frac{3p}{2})j}.$$

若 $0 \leqslant j < j'$，令

$$a_{j,k}^{\epsilon,j'} = \langle g_{j'}, \Phi_{j,k}^\epsilon(x) \rangle = 2^{\frac{j}{2}} \langle g_{j'}, \Phi^\epsilon(2^j x - k) \rangle,$$

于是

$$\sum_k |a_{j,k}^{\epsilon,j'}|^p \leqslant 2^{\frac{pj}{2}} \sum_k |\langle g_{j'}, \Phi^\epsilon(2^j x - k) \rangle|^p$$

$$\leqslant C(\epsilon_{j'} + \epsilon_{j'+1})^p 2^{-psj' + (1-\frac{p}{2})j}. \text{（9 分）}$$

由于 $a_{j,k}^\epsilon = a_{j,k}^{\epsilon,-1} + \sum_{0 \leqslant j' \leqslant j} a_{j,k}^{\epsilon,j'} + \sum_{j'>j} a_{j,k}^{\epsilon,j'}$，则对于 $j > 0$，有

$$\sum_k |a_{j,k}^\epsilon|^p \leqslant C\sum_k |a_{j,k}^{\epsilon,-1}|^p + C\sum_k \Big(\sum_{0 \leqslant j' \leqslant j} |a_{j,k}^{\epsilon,j'}| \Big)^p$$

$$+ C\sum_k \Big(\sum_{j'>j} |a_{j,k}^{\epsilon,j'}| \Big)^p.$$

选取充分小的正数 δ，有

$$\sum_k |a_{j,k}^\epsilon|^p \leqslant C\sum_k |a_{j,k}^{\epsilon,-1}|^p + \sum_{0 \leqslant j' \leqslant j} 2^{\delta(j-j')} C\sum_k |a_{j,k}^{\epsilon,j'}|^p$$

$$+ C\sum_{j'>j} 2^{\delta(j'-j)} \sum_k |a_{j,k}^{\epsilon,j'}|^p$$

$$\leqslant C \sum_{0 \leqslant j' \leqslant j} \epsilon_{j'}^p 2^{(1+\delta-\frac{3p}{2})j + (p-ps-\delta)j'}$$

$$+ C\sum_{j'>j} \epsilon_{j'}^p 2^{(1-\delta-\frac{p}{2})j + (\delta-ps)j'}.$$

从而有

$$I_{p,q} = \sum_{j \geqslant 0} 2^{jq(s+\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \Big(\sum_k |a_{j,k}^\epsilon|^p \Big)^{\frac{q}{p}}$$

$$\leqslant C\sum_{j \geqslant 0} 2^{jq(s+\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \Big(\sum_{0 \leqslant j' \leqslant j} \epsilon_{j'}^p 2^{(1+\delta-\frac{3p}{2})j + (p-ps-\delta)j'} \Big)^{\frac{q}{p}}$$

$$+ C\sum_{j \geqslant 0} 2^{jq(s+\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \Big(\sum_{j'>j} \epsilon_{j'}^p 2^{(1-\delta-\frac{p}{2})j + (\delta-ps)j'} \Big)^{\frac{q}{p}}. \text{（6 分）}$$

如果 $q \leqslant p$，那么有

$$
\begin{aligned}
I_{p,q} &\leqslant C\sum_{j\geqslant 0}2^{jq(s+\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\sum_{0\leqslant j'\leqslant j}\varepsilon_{j'}^{q}2^{(\frac{1+\delta}{p}-\frac{3}{2})qj+(1-s-\frac{\delta}{p})qj'}\\
&\quad +C\sum_{j\geqslant 0}2^{jq(s+\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\sum_{j'>j}\varepsilon_{j'}^{q}2^{(\frac{1-\delta}{p}-\frac{1}{2})qj+(\frac{\delta}{p}-s)qj'}\\
&\leqslant C\sum_{j'\geqslant 0}\varepsilon_{j'}^{q}2^{(1-s-\frac{\delta}{p})qj'}\sum_{j\geqslant j'}2^{-(1-s-\frac{\delta}{p})qj}\\
&\quad +C\sum_{j'\geqslant 0}\varepsilon_{j'}^{q}2^{(\frac{\delta}{p}-s)qj'}\sum_{0\leqslant j<j'}2^{(s-\frac{\delta}{p})qj}\\
&\leqslant C\sum_{j'\geqslant 0}\varepsilon_{j'}^{q}.\ (5\text{ 分})
\end{aligned}
$$

如果 $q > p$，则选取充分小的正数 δ'，有

$$
\begin{aligned}
I_{p,q} &\leqslant C\sum_{j\geqslant 0}2^{jq(s+\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\sum_{0\leqslant j'\leqslant j}\varepsilon_{j'}^{q}2^{(\frac{1+\delta}{p}-\frac{3}{2}+\delta')qj+(1-s-\frac{\delta}{p}-\delta')qj'}\\
&\quad +C\sum_{j\geqslant 0}2^{jq(s+\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\sum_{j'>j}\varepsilon_{j'}^{q}2^{(\frac{1-\delta}{p}-\frac{1}{2}-\delta')qj+(\frac{\delta}{p}-s+\delta')qj'}\\
&\leqslant C\sum_{j'\geqslant 0}\varepsilon_{j'}^{q}2^{(1-s-\frac{\delta}{p}-\delta')qj'}\sum_{j\geqslant j'}2^{-(1-s-\frac{\delta}{p}-\delta')qj}\\
&\quad +C\sum_{j'\geqslant 0}\varepsilon_{j'}^{q}2^{(\frac{\delta}{p}+\delta'-s)qj'}\sum_{0\leqslant j<j'}2^{(s-\frac{\delta}{p}-\delta')qj}\\
&\leqslant C\sum_{j'\geqslant 0}\varepsilon_{j'}^{q}.\ (5\text{ 分})
\end{aligned}
$$

反过来，令

$$
\varepsilon_j = 2^{j(s+\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\Big(\sum_{\epsilon,k}|a_{j,k}^{\epsilon}|^{p}\Big)^{\frac{1}{p}},\quad g_j(x)=\sum_{(\epsilon,j,k)\in\Lambda}a_{j,k}^{\epsilon}\Phi_{j,k}^{\epsilon}(x),
$$

则 $f=g_0+g_1+\cdots$，且 $\forall\,|\alpha|=1$，有

$$
\begin{aligned}
\|\partial^{\alpha}g_j\|_p &\leqslant 2^{\frac{3j}{2}}\Big[\int\Big(\sum_{\epsilon,k}|a_{j,k}^{\epsilon}|\,|\partial^{\alpha}\Phi^{\epsilon}(2^{j}x-k)|\Big)^{p}dx\Big]^{\frac{1}{p}}\\
&\leqslant C2^{j(\frac{3}{2}-\frac{1}{p})}\Big(\sum_{\epsilon,k}|a_{j,k}^{\epsilon}|^{p}\Big)^{\frac{1}{p}}\leqslant \varepsilon_j 2^{(1-s)j},\\
\|g_j\|_p &\leqslant 2^{\frac{j}{2}}\Big[\int\Big(\sum_{\epsilon,k}|a_{j,k}^{\epsilon}|\,|\Phi^{\epsilon}(2^{j}x-k)|\Big)^{p}dx\Big]^{\frac{1}{p}}\\
&\leqslant C2^{j(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\Big(\sum_{\epsilon,k}|a_{j,k}^{\epsilon}|^{p}\Big)^{\frac{1}{p}}\leqslant \varepsilon_j 2^{-sj}.\ (5\text{ 分})
\end{aligned}
$$

$\forall\, j\geqslant 1$，令 $f_j(x)=\sum\limits_{0\leqslant j'\leqslant j-1}g_{j'}(x)$. 令

$$
\tau_j^1=\sum_{j'\geqslant j}\varepsilon_{j'}2^{-j's},\quad \tau_j^2=\sum_{j'\geqslant j}\varepsilon_{j'}2^{j'(1-s)},
$$

于是 $\{\tau_j^1\},\{\tau_j^2\}\in l^q$. 令 $\tau_j=\tau_j^1+\tau_j^2$，于是 $\{\tau_j\}\in l^q$. 又

$$\|f-f_j\|_p \leqslant \tau_j^1, \quad \|\partial^\alpha f_j\|_p \leqslant \tau_j^2,$$

故 $f(\boldsymbol{x}) \in B_p^{s,q}$. (5 分)

四、(15 分) 证明：若 $f, \hat{f} \in L^1(\mathbf{R}^n)$，那么

$$F^{-1}(\hat{f})(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), \quad \text{a. e. } \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n.$$

答题要点 给定 $t>0$，$g(\boldsymbol{x}) = \pi^{-\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{-|\boldsymbol{x}|^2}$，令 $g_t(\boldsymbol{x}) = t^{-n} g\left(\frac{\boldsymbol{x}}{t}\right)$，则有

$$\begin{aligned}(2\pi)^{-n}\int \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t^2|\xi|^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\hat{f}(\xi)\mathrm{d}\xi &= (2\pi)^{-n}\iint \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t^2|\xi|^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-y)\xi} f(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} \\ &= \pi^{-\frac{n}{2}}\int f(\boldsymbol{y}) t^{-n} \mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{t^2}}\mathrm{d}\boldsymbol{y} \\ &= g_t * f(\boldsymbol{x}). \ (5\text{ 分})\end{aligned}$$

由于 $f\in L^1$，由单位逼近有

$$\lim_{t\to 0}\|g_t * f - f\|_1 = 0. \ (4\text{ 分})$$

由于 $\hat{f}\in L^1(\mathbf{R}^n)$，由控制收敛定理有

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}(2\pi)^{-n}\int \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t^2|\xi|^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\hat{f}(\xi)\mathrm{d}\xi &= (2\pi)^{-n}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\hat{f}(\xi)\mathrm{d}\xi \\ &= F^{-1}(\hat{f})(\boldsymbol{x}). \ (4\text{ 分})\end{aligned}$$

于是，得到 $\|f(\boldsymbol{x}) - F^{-1}(\hat{f})(\boldsymbol{x})\|_1 = 0$，由此而得所需结论. (2 分)

五、(15 分) 假设 $f\in L^1\cap L^2$，利用上面第四题的结论证明：

$$\int |f(\boldsymbol{x})|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x} = (2\pi)^{-n}\int |\hat{f}(\boldsymbol{x})|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

答题要点 因为 $f\in L^1\cap L^2$，所以 $f*g_t(\boldsymbol{x})$ 和 $\hat{f}(\boldsymbol{x})\hat{g}(t\xi)$ 均属于 L^1. (2 分)

于是，由 Fourier 变换的逆定理有

$$\begin{aligned}\int |f*g_t(\boldsymbol{x})|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \int f*g_t(\boldsymbol{x})\,\overline{f*g_t(\boldsymbol{x})}\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &= \int F^{-1}(F(f*g_t))(\boldsymbol{x})\,\overline{f*g_t(\boldsymbol{x})}\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &= (2\pi)^{-n}\int (F(f*g_t))(\boldsymbol{x})\,\overline{F(f*g_t)(\boldsymbol{x})}\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &= (2\pi)^{-n}\int (F(f*g_t))(\boldsymbol{x})\,\overline{F(f*g_t)(\boldsymbol{x})}\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &= (2\pi)^{-n}\int |\hat{f}(\boldsymbol{x})\hat{g}(t\xi)|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \ (8\text{ 分})\end{aligned}$$

由于 $\int |f*g_t(\boldsymbol{x})|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x} \to \int |f(\boldsymbol{x})|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}$，因此 $\int |\hat{f}(\boldsymbol{x})\hat{g}(t\xi)|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 收敛于

一个有界量，这导致$\int|\hat{f}(x)|^2\mathrm{d}x$有界.（2分）

又有$\int|\hat{f}(x)\hat{g}(t\xi)|^2\mathrm{d}x\to\int|\hat{f}(x)|^2\mathrm{d}x$.（2分）

于是，有$\int|f(x)|^2\mathrm{d}x=(2\pi)^{-n}\int|\hat{f}(x)|^2\mathrm{d}x$.（1分）

第七套试卷

（总分100分）

一、(30分) 给定$0<s<1$，称$f(x)\in C^s_{x_0}(\mathbf{R}^n)$，如果存在$x_0$的邻域$V_{x_0}$使得

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant C|x-x_0|^s.$$

给定$\Lambda=\{(\epsilon,j,k):\epsilon\in\{0,1\}^n\backslash\{\mathbf{0}\},\ j\in\mathbf{Z},\ k\in\mathbf{Z}^n\}$，给定2阶光滑的具有紧支集的正交Daubechies小波基$\{\Phi^\epsilon_{j,k}\}_{(\epsilon,j,k)\in\Lambda}$. 于是，对于连续函数$f(x)$，小波系数$f^\epsilon_{j,k}=\langle f(x),\Phi^\epsilon_{j,k}(x)\rangle$有定义，且在磨光滑函数的分布意义下等式

$$f(x)=\sum_{\epsilon,j,k}f^\epsilon_{j,k}\Phi^\epsilon_{j,k}(x)$$

成立. 如果给定j_{x_0}，我们认为分布$f(x)=\sum\limits_{\epsilon,\ j\leqslant j_{x_0},\ k}f^\epsilon_{j,k}\Phi^\epsilon_{j,k}(x)\in C^s_{x_0}(\mathbf{R}^n)$，证明：

(1) 设$f(x)\in C^s_{x_0}(\mathbf{R}^n)$，则存在正常数$C_1$和正常数$C_2$使得$f(x)$的小波系数$f^\epsilon_{j,k}=\langle f(x),\Phi^\epsilon_{j,k}(x)\rangle$满足

$$|f^\epsilon_{j,k}|\leqslant C2^{-j(\alpha+\frac{n}{2})},\quad \forall j\geqslant C_1,\ |x_0-2^{-j}k|\leqslant C_2;\qquad ①$$

(2) 反过来，若$f(x)$的小波系数满足①，那么$f(x)\in C^s_{x_0}(\mathbf{R}^n)$.

答题要点 (1) 对于Daubechies小波基，存在正常数C_1和正常数C_2使得$\forall j\geqslant C_1$，$|x_0-2^{-j}k|\leqslant C_2$，有$\operatorname{supp}\Phi^\epsilon_{j,k}(x)\subset V_{x_0}$. 于是

$$f^\epsilon_{j,k}=\langle f(x),\Phi^\epsilon_{j,k}(x)\rangle=\langle f(x)-f(2^{-j}k),\Phi^\epsilon_{j,k}(x)\rangle.$$

从而

$$|f^\epsilon_{j,k}|\leqslant\int|x-2^{-j}k|2^{\frac{j}{n}}(1+|x-2^{-j}k|^{-N})\mathrm{d}x\leqslant C2^{-j(\alpha+\frac{n}{2})}.$$

(2) 反过来，$f_1(x)=\sum\limits_{\epsilon,\ j\leqslant C_1,\ k}f^\epsilon_{j,k}\Phi^\epsilon_{j,k}(x)\in C^s_{x_0}(\mathbf{R}^n)$. 令

$$|x-x_0|\leqslant 2^{-j_0}<2|x-x_0|,$$

则由 ① 式有

$$|f_2(x)-f_2(x_0)|\leqslant\sum_{\epsilon,\ C_1<j\leqslant j_0,\ k}|f_{j,k}^{\epsilon}|(|\Phi_{j,k}^{\epsilon}(x)|+|\Phi_{j,k}^{\epsilon}(x_0)|)$$
$$\leqslant C|x-x_0|^s.$$

由 ① 式和小波的光滑性，有

$$|f_3(x)-f_3(x_0)|\leqslant\sum_{\epsilon,\ C_1<j\leqslant j_0,\ k}|f_{j,k}^{\epsilon}||\Phi_{j,k}^{\epsilon}(x)-\Phi_{j,k}^{\epsilon}(x_0)|$$
$$\leqslant C|x-x_0|^s.$$

二、(15 分) 令 $f(x)\in L^p(\mathbf{R}^n)$，$\forall p>1$，那么

$$\lim_{N'\to+\infty}\sum_{N>N'}\int_{2^N\leqslant|x|<2^{N+1}}|f(x)|^p\mathrm{d}x=0.$$

证明：存在 $f_m(x)\in S(\mathbf{R}^n)$ 使得 $\forall p>1$，有$\|f_m(x)-f(x)\|_p\to0$.

答题要点 令 $f_N(x)=f(x)|_{|x|<2^N}$. $f(x)\in L^p$ 导出对于任意的ε，存在 N 使得

$$\|f(x)-f_N(x)\|_p\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

对于具有紧支集的光滑磨光子 $\varphi(x)$，我们知道 $f_N*\varphi_t(x)\in S(\mathbf{R}^n)$ 且

$$\|f_N*\varphi_t(x)-f_N(x)\|_p\to0,$$

从而可以选取特殊的 t_0 使得 $f_m=f_N*\varphi_{t_0}(x)\in S(\mathbf{R}^n)$ 且

$$\|f_m(x)-f_N(x)\|_p\to0.$$

三、(15 分) 令 $\chi_E(x)$ 为集合 E 上的特征函数，

$$f_k(x)=\mathrm{e}^{-|x|}+\chi_{(2^{k^2},0,\cdots,0)+[0,1]^n}(x),\quad\forall k\in\mathbf{N}.$$

证明：在分布意义下 $f_k(x)\to\mathrm{e}^{-|x|}$.

答题要点 $\forall\varphi(x)\in S(\mathbf{R}^n)$，我们有

$$|\langle f_k(x)-\mathrm{e}^{-|x|},\varphi(x)\rangle|\leqslant\int_{(2^{k^2},0,\cdots,0)+[0,1]^n}|\varphi(x)|\mathrm{d}x.$$

另一方面，我们知道

$$\int_{(2^{k^2},0,\cdots,0)+[0,1]^n}|\varphi(x)|\mathrm{d}x\leqslant2^{-k^2}\|x\varphi(x)\|_\infty\to0.$$

四、(40 分) 令 $\chi_{[a,b]}(x)$ 为区间$[a,b]$上的特征函数，

$$g(x)=\chi_{[0,1]}(x),\quad h(x)=\chi_{[0,\frac{1}{2}]}(x)-\chi_{[\frac{1}{2},1]}(x).$$

$\forall j\in\mathbf{Z}$，$k\in\mathbf{Z}$，我们记 $h_{j,k}(x)=2^{\frac{j}{2}}h(2^jx)$. 试按如下顺序证明 $\{h_{j,k}\}_{j\in\mathbf{Z},\ k\in\mathbf{Z}}$ 为 $L^2(\mathbf{R})$ 上的正交基：

(1) 令$V_0=\left\{f(x)\in L^2(\mathbf{R}): f(x)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}a_k g(x-k)\right\}$，证明：$\{g(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$为$V_0$的一组正交基；

(2) 由如下的伸缩关系定义V_j：

$$\forall f\in L^2(\mathbf{R}^n), \forall j\in\mathbf{Z}, f(x)\in V_j \Leftrightarrow f(2x)\in V_{j+1}, \qquad ②$$

证明：$\bigcap_{-\infty}^{\infty}V_j=\{0\}$，$\bigcup_{-\infty}^{\infty}V_j$在$L^2(\mathbf{R}^n)$中稠密；

(3) 令$W_0=\left\{f(x)\in L^2(\mathbf{R}): f(x)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}a_k h(x-k)\right\}$. 证明：$\forall F(x)\in V_1$，存在$F_1(x)\in V_0$，$F_2(x)\in W_0$使得$F(x)=F_1(x)+F_2(x)$.（提示：$g(2x)$可以表示成$g(x-k)$和$h(x-k)$的线性组合.）

答题要点 (1) 由于对于不同的k，函数$g(x-k)$的支集不同，所以$\{g(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$正交. 又由于$\{g(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$生成$V_0$，故$\{g(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$为$V_0$的正交基.

(2) 由$\bigcap_{-\infty}^{\infty}V_j=\{0\}$知，坐标轴左右两边的任意二进区间上为常数. 再由$L^2$有界性知，此常数只可能为0.

$L^2(\mathbf{R})$中的函数均可由有限个二进区间上的特征函数所逼近，因此$\bigcup_{-\infty}^{\infty}V_j$在$L^2(\mathbf{R})$中稠密.

(3) $g(2x)$和$g(2x-1)$分别可以表示成$g(x-k)$和$h(x-k)$的线性组合，由此导出$\forall F(x)\in V_1$，存在$F_1(x)\in V_0$，$F_2(x)\in W_0$使得

$$F(x)=F_1(x)+F_2(x).$$



参考文献

[1] BERGH J, LÖFSTRÖM J. Interpolation spaces, an introduction. Berlin Heidelberg: Spring-Verlag, 1976.

[2] BEYLKIN G, COIFMAN R, ROKHLIN V. Fast wavelet transforms and numerical algorithms. Comm. Pure Appl. Math., 1991, 44: 141-183.

[3] COHEN A, DAUBECHIES I, FEAUVEAU J. Biorthogonal bases of compactly supported wavelets. Commun Pure Appl Math, 1992, 45: 485-560.

[4] COIFMAN R, LIONS P L, MEYER Y, SEMMES S. Compensated compactness and Hardy spaces. J. Math. Pures Appl., 1993, 72: 247-286.

[5] CHUI C K. An introduction to wavelets. Boston: Academic Press Inc., 1992.（中译本：崔锦泰. 小波分析导论. 程正兴，译. 西安：西安交通大学出版社，1995.）

[6] DAUBECHIES I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. Commun Pure Appl Math, 1988, 41: 909-996.

[7] DAUBECHIES I. Ten Lectures on wavelets (CBMS-NSF Regional conference series in applied mathematics, Vol. 61). Philadelphia, PA: SIAM, 1992.（中译本：小波十讲. 李建平，杨万年，译. 北京：国防工业出版社，2004.）

[8] ESSÉN M, JANSON S, PENG L Z, XIAO J. *Q* spaces of several real variables. Indiana University Mathematics Journal, 2000, 49 (2): 575-615.

[9] FARGE M, HUNT J C R, VASSILICOS J C. Wavelets, fractals and Fourier transforms. Oxford: Clarendon Press, 1993.

[10] GALA S, LEMARIÉ-RIEUSSET P G. Multipliers between Sobolev spaces and fractional differentiation. J. Math. Anal. Appl., 2006,

322：1030-1054.

[11] GASQUET C，WILTOMSKI P. Fourier analysis and applications—Filtering，numerical computation，wavelets. New York Berlin Heidelberg：Spring-Verlag，1998.

[12] GILBERT J G，NAHMOD A R. Boundedness of bilinear operators with nonsmooth symbols. Mathematical Research Letters，2000，7：767-778.

[13] JOHN F，NIRENBERG L. On functions of bounded mean oszillation. Comm. Pure Appl. Math.，1961，14：415-426.

[14] KATZNELSON Y. An introduction to harmonic analysis. Third edition. Cambridge，England：Cambridge University Press，2004.

[15] LACEY M. The bilinear maximal function maps in L^p for $\frac{2}{3}<p\leqslant 1$. Ann. of Math，2000，151 (2)：35-57.

[16] LACEY M，THIELE C. On Calderón's conjecture. Annals of Mathematics，1999，149：475-496.

[17] LANG S. Real and functional analysis. New York Berlin Heidelberg：Springer-Verlag，1996.

[18] MALLAT S. A theory for multiresolution signal decomposition：the wavelet representation. IEEE Trans，PAMI，1989，11 (7)：674-693.

[19] MALLAT S. Multiresolution approximation and wavelets orthonormal bases of $L^2(\mathbf{R})$. Trans. Amer. Math. Soc.，1989，315 (1)：69-88.

[20] MALLAT S. A wavelet tour of signal processing. Second edition. Academic Press，1999.（中译本：信号处理的小波导引. 杨力华，戴道清，黄文良，湛秋辉，译. 北京：机械工业出版社，2002.）

[21] MAZ'YA V，SHAPOSHNIKOVA T. Theory of multipliers in spaces of differentiable functions. Monographs and studies in mathematics 23，Pitman，1985.

[22] MEYER Y. Ondelettes et Opérateurs，Ⅰ. Paris：Hermann，1990.（中译本：小波与算子. 第一卷. 尤众，译. 北京，广州，上海，西安：世界图书出版公司，1992.）

[23] MEYER Y. Ondelettes et Opérateurs，Ⅱ. Paris：Hermann，1991；MEYER Y，COIFMAN R. Ondelettes et Opérateurs，Ⅲ. Paris：

Hermann，1991.（中译本：小波与算子. 第二卷. 王耀东，译. 北京，广州，上海，西安：世界图书出版公司，1992.）

[24] MEYER Y. Wavelets: Algorithms and applications. Philadelphia: SIAM Publ. , 1993.

[25] MEYER Y，YANG Q X. Continuity of Calderón-Zygmund operatorson Besov or Triebel-Lizorkin spaces. Anal. Appl. (Singap.)，2008，6(1): 51-81.

[26] MORREY C B. On the solutions of quasi linear elliptic partial differential equations. Trans. Amer. Math. Soc. , 1938，43: 126-166.

[27] PEETRE J. New Thougths on Besov Spaces. Duke University Mathematics Series. Durham: Duke University Press，1976.

[28] PENG L Z，YANG Q X. Predual spaces for *Q* spaces. Acta Math. Sci. Ser. B，Engl. Ed. , 2009，29 (2): 243-250.

[29] DONALD B PERCIVAL，ANDREW T WALDEN. Wavelet methods for time series analysis. Cambridge: Cambridge University Press，2000.（中译本：时间序列分析的小波方法. 程正兴，等，译. 北京：机械工业出版社，2006.）

[30] PINSKY MARK A. Introduction to Fourier analysis and wavelets. Thomson Learning Inc. ，北京：机械工业出版社，2003.

[31] ROYDEN H L. Real analysis. Third edition. Pearson Education，Inc. , 1967.

[32] RUDIN W. Real and complex analysis. Third edition. McGraw-Hill Companies，1987.（中译本：实分析与复分析. 戴牧民，张更容，郑顶伟，李世余，译. 北京：机械工业出版社，2006.）

[33] REED M，SIMON B. Methods of modern mathematical physics，Ⅱ. Fourier analysis，self-adjointness，San Diego，New York，Boston，London，Sydney，Tokyo，Toronto: Academic Press，1976.

[34] SAWANO Y，YANG D，YUAN W. New applications of Besov-type and Triebel-Lizorkin-type spaces. J. Math. Anal. Appl. , 2010，363: 73-85.

[35] STEIN E M. Harmonic analysis—Real variable methods，orthogonality，and integrals. Princeton: Princeton University Press，1993.

[36] STRANG G，NGUYEN T. Wavelets and filter banks. Wellesley-Cambridge Press，1996.

[37] TRIEBEL H. Theory of function spaces. Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Stuttgart: Springer-Verlag, 1983.

[38] TRIEBEL H. Theory of Function Spaces Ⅲ. Birkhauser Verlag, Basel: Springer-Verlag, 2006.

[39] TRIEBEL H. Function Spaces and Wavelets on Domains. Zurich: EMS Publishing House, 2008.

[40] VIDAKOVIC B. Statistical modeling by wavelets. John Wiley & Sons, Inc., 1999.(中译本:统计建模的小波方法. 田铮,译. 北京:高等教育出版社,2007.)

[41] WALTER G G. Wavelets and orthogonal systems with applications. CRC Press, 1994.

[42] WOJTASZCZYK P. A Mathematical Introduction to Wavelets. London Mathematical Society Student Texts 37. London: Cambridge University Press, 1997.

[43] WU Z, XIE C. Decomposition theorems for Q_p spaces. Ark. Mat., 2002, 40: 383-401.

[44] WU Z, XIE C. Q spaces and Morrey spaces. J. Funct. Anal., 2003, 201: 282-297.

[45] YANG Q X. Fast algorithms for Calderon-Zygmund singular integral operators. Applied and computational harmonic analysis, 1996, 3: 120-126.

[46] YANG Q X. New wavelet bases and isometric between symbolic operators spaces Op $S^m_{1,\delta}$. Acta Math. Sin. (Engl. Ser.), 2002, 18 (1): 107-118.

[47] YANG Q X. Atomic decomposition in $L^p(1<p<\infty)$. Indian J. Pure Appl. Math., 2000, 31 (9): 1081-1087.

[48] YANG Q X. Wavelet characterization of Hormander symbol class Op $S^m_{\rho,\delta}$ and applications. Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.), 2005, 115 (3): 1-22.

[49] YUAN W, SICKEL W, YANG D. Morrey and Campanato Meet-Besov, Lizorkin and Triebel. Lecture Notes in Mathematics 2005 Editors: J.-M. Morel, Cachan F. Takens, Groningen B. Teissier, Paris, Springer Heidelberg Dordrecht London New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.

[50] 陈武凡. 小波分析及其在图像处理中的应用. 北京：科学出版社，2002.

[51] 成礼智，郭汉伟. 小波与离散变换——理论及工程实践. 北京：清华大学出版社，2004.

[52] 成礼智，王红霞，罗永. 小波的理论与应用. 北京：科学出版社，2004.

[53] 程民德，邓东皋，龙瑞麟. 实分析. 北京：高等教育出版社，1993.

[54] 程正兴. 小波分析算法与应用. 西安：西安交通大学出版社，1998.

[55] 邓东皋，韩永生. H^p 空间论. 北京：北京大学出版社，1992.

[56] 丁勇. 现代分析基础. 北京：北京师范大学出版社，2008.

[57] 何正嘉，陈雪峰，李兵，向家伟. 小波有限元理论及其工程应用. 北京：科学出版社，2006.

[58] 胡适耕，刘金山. 实变函数与泛函分析——定理方法问题. 北京：高等教育出版社，2003.

[59] 匡继昌. 实分析与泛函分析. 北京：高等教育出版社，2002.

[60] 李弼程，罗建书. 小波分析及其应用. 北京：电子工业出版社，2003.

[61] 李建平，唐远炎. 小波分析方法的应用. 重庆：重庆大学出版社，1999.

[62] 李水根，吴纪桃. 分形与小波. 北京：科学出版社，2002.

[63] 刘贵忠，邸双亮. 小波及其应用. 西安：西安电子科技大学出版社，1992.

[64] 龙瑞麟. 高维小波分析. 北京，广州，上海，西安：世界图书出版公司，1995.

[65] 陆善镇，Taibleson M H，Weiss G. 由块生成的空间. 长沙：湖南教育出版社，1996.

[66] 彭思龙，李登峰，谌秋辉. 周期小波理论及其应用. 北京：科学出版社，2003.

[67] 彭玉华. 小波变换与工程应用. 北京：科学出版社，1999.

[68] 齐民友，吴方同. 广义函数与数学物理方程. 北京：高等教育出版社，1989.

[69] 秦前清，杨宗凯. 实用小波分析. 西安：西安电子科技大学出版社，1994.

[70] 邱森. 线性代数探究性课题精编. 武汉：武汉大学出版社，2011.

[71] 冉启文，谭立英. 小波分析与分数傅里叶变换及应用. 北京：国防工

业出版社，2002.

[72] 孙清华，孙昊. 实变函数——内容，方法与技巧. 武汉：华中科技大学出版社，2004.

[73] 孙延奎. 小波分析及其应用. 北京：机械工业出版社，2005.

[74] 唐远炎，王玲. 小波分析与文本文字识别. 北京：科学出版社，2004.

[75] 王向东，梁鍌廷，戎海武. 索伯列夫空间论. 北京：科学出版社，2004.

[76] 王智均，李德仁，李清泉. 利用小波变换对影像进行融合的研究. 武汉测绘科技大学学报，2000，25 (2)：137-142.

[77] 徐长发，李国宽. 实用小波方法. 武汉：华中科技大学出版社，2004.

[78] 杨奇祥. 小波与分布——小波应用的部分机理. 北京：北京科学技术出版社，2002.

[79] 杨奇祥. 用小波限制紧算子逼近奇异积分算子的速度. 数学进展，2003，32 (5)：547-552.

[80] 杨奇祥，程正兴，彭立中. 小波与函数空间. 数学物理学报中文版，2005，25 (1)：130-144.

[81] 张组勋，张剑清. 数学摄影测量学. 武汉：武汉大学出版社，2001.

[82] 张旭东，卢国栋，冯健. 图像编码基础和小波压缩技术——原理，算法和标准. 北京：清华大学出版社，2004.

[83] 曾文曲，文有为，孙炜. 分形，小波与图像压缩. 沈阳：东北大学出版社，2002.

[84] 周民强. 调和分析讲义(实变方法). 北京：北京大学出版社，1999.

[General Information]
□□=□□□□□□□□□
□□=□□□□□
□□=118
SS□=12918981
DX□=
□□□□=2012.01
□□□=□□□□□□□